WILLIAM KNEALE
MARTHA KNEALE

●

DEZVOLTAREA LOGICII

* *

WILLIAM KNEALE - MARTHA^KNEALE,
THE DEVELOPMENT OF LOGIC
The Clarendon'Press Oxford, 1966
© W. Kneale andjM. Kneale, 1962

WILLIAM MARTHA

KNEALE KNEALE

DEZVOLTAREA LOGICII

Traducere de
SORIN VIERU şi UŞER MORGENSTERN

EDITURA DACIA
CLUJ-NAPOCA, 1975

CUPRINS

VI. ABSTRACŢIA MATEMATICĂ.....

1. Geometrie şi axiomatică .....
2. Numere şi funcţii .....
3. Boole şi algebra logicii.....
4. Dezvoltări ulterioare ale algebrei booleene.....
5. Teoria relaţiilor: De Morgan şi Peirce.....

VII. NUMERE, MULŢIMI ŞI ŞIRURI .....

1. Frege şi contemporanii săi.....
2. Teoria mulţimilor a lui Cantor .....
3. Frege despre precursorii săi.....
4. Definiţiile lui Frege pentru numerele naturale.....
5. Şirul numerelor: Dedekind şi Peano.....

VIII. LOGICA GENERALĂ A LUI FREGE.....

1. *Begriffsschrift .....*
2. Sens şi referinţă: obiecte şi funcţii.....
3. Logica din *Grundgesetze*.....
4. Realizările lui Frege.....

IX. DEZVOLTĂRI FORMALE DUPĂ FREGE .....

1. Varietăţi de simbolism.....
2. Metode de prezentare: axiome şi reguli.....
3. Deducţie naturală şi desfăşurare.....
4. Logica modală.....
5. Propuneri de logici alternative.....

X. FILOSOFIA LOGICII DUPĂ FREGE.....

1. Expresie, desemnare şi adevăr .....
2. Teoria descripţiilor şi varietatea desemnărilor.....
3. Problemele intensionalităţii.....

4. Identitate, funcţii şi clase .....
5. Necesitate şi limbaj .....

XI. FILOSOFIA MATEMATICII DUPĂ FREGE.....

1. Paradoxurile teoriei mulţimilor .....
2. Teoria tipurilor logice a lui Russell.....
3. Intuiţionismul lui Brouwer.....
4. Programul hilbertian al metamatematicii.....

XII. TEORIA SISTEMELOR DEDUCTIVE

1. Metateoria logicii primare.....
2. Metateoria logicii generale .....
3. Incompletabilitatea aritmeticii formale.....
4. Problema deciziei.....
5. Locul logicii printre ştiinţe.....

Bibliografie selectivă.....

Indice.....

Anexa

ABSTRACŢIA MATEMATICĂ

1. *Geometrie şi axiomatică*

Pentru greci, partea cea mai importantă a matematicii era geometria, iar în *Elementele* lui Euclid, cărţile VII—X, găsim chiar teoreme de aritmetică pură, cum ar fi cele cu privire la numerele prime, prezentate ca propoziţii cu privire la comensurabilitatea sau incomensura- bilitatea unor segmente liniare. Unii consideră că relativa neglijare a celorlalte ramuri ale matematicii de către greci ar fi fost cauzată de deficienţele sistemului lor de numeraţie; dar pare mai probabil că geometria s-a dezvoltat anterior, deoarece efortul de abstracţie pe care îl pretinde nu este atît de mare ca cel necesar pentru algebră şi analiză. în prezent vedem că pînă şi matematicienii din perioadele mult mai tîrzii au întîmpinat dificultăţi în eliberarea de legătura excesivă cu intuiţia spaţială. Oricum ar fi, pentru multe secole *Elementele* lui Euclid au fost un standard de rigoare în ce priveşte demonstraţia şi noi trebuie să începem prin a examina liniile mari ale operei sale, deşi subiectul principal al acestui capitol îl constituie dezvoltările ulterioare.

Evident, nu Euclid a descoperit toate teoremele pe care le prezintă în *Elemente.* Au existat tratate de geometrie înainte de începutul celui de-al treilea veac î.e.n., cînd a lucrat el; cunoaştem, de exemplu, că eleganta teorie a rapoartelor pe care o utilizează în cartea a V-a vine de la Eudoxus, un contemporan mai tînăr al lui Platon. Dar el şi-a cucerit gloria datorită măiestriei pe care a atins-o în ce priveşte derivarea tuturor descoperirilor anterioare dintr-un număr relativ redus de noţiuni comune xowai ewolat şi postulate (alrijpaTa). Noţiunile comune sînt propoziţii considerate fundamentale în orice ştiinţă, cum ar fi, de exemplu, că întregul este mai mare decît oricare parte a lui, iar postulatele sînt cinci propoziţii specifice geometriei pe care trebuie să le admitem de la bun început. Ulterior, cele două mulţimi de propoziţii primitive au fost uneori

considerate împreună sub numele de axiome. Trebuie să admitem că în diferite locuri Euclid face uz de propoziţii geometrice pe care nici nu le include printre axiomele sale, nici nu le demonstrează ca rezultînd din acestea; de exemplu, în demonstraţia primei propoziţii din cartea I el admite ca dat, că cele

două cercuri trasate în jurul a două extremităţi ale unui segment liniar avînd raza egală în lungime cu acest segment trebuie să se intersecteze în două puncte. Dar nu încape îndoială că el intenţiona să-şi aşeze toate ipotezele extralogice la început şi să derive teoremele din aceste ipoteze numai cu ajutorul logicii. Căci orice altceva ar fi fost un compromis inconsistent cu acea dorinţă de rigoare care străbate în mod evident întreaga sa operă. Utilizarea unei figuri ne poate ajuta să ne concentrăm atenţia atunci cînd urmărim o demonstraţie, iar pentru motive psihologice ea poate să fie chiar necesară în procesul de descoperire; dar dacă acceptăm propoziţiile numai pentru că ele par evidente, atunci cînd examinăm un desen, în realitate nu facem decît să adăugăm ceva, fără a ne da seama, la axiomele noastre, iar aceasta contravine spiritului geometriei grecilor.

Euclid şi toţi urmaşii săi, pînă mai acum o sută de ani, au presupus că postulatele sale sînt adevăruri universale şi necesare cu privire la spaţiul fizic. Dar între ele figurează unul care părea mai complicat decît celelalte. Acesta este faimosul postulat al paralelelor: „Dacă o dreaptă secantă la alte două determină unghiuri interioare de aceeaşi parte mai mici decît două unghiuri drepte, atunci cele două drepte, dacă le prelungim la infinit, se întîlnesc de acea parte în care unghiurile sînt mai mici decît două unghiuri drepte". în antichitate, atît Ptolomeu cît şi Produs au încercat să arate că această propoziţie nu ar trebui să figureze ca postulat deoarece ea poate fi demonstrată ca teoremă, iar geometrii de mai tîrziu au făcut multe încercări asemănătoare pentru a îmbunătăţi opera lui Euclid‡. Una din cele mai interesante a fost cartea lui Saccheri din 1733, intitulată *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus.* După cum spune autorul§, această lucrare se întemeiază pe principiul *consequentia mirabilis,* pe care el l-a utilizat în a sa *Logica Demonstrativa;* şi deşi el nu a reuşit să stabilească, aşa cum îşi închipuia, caracterul de adevăr necesar al postulatului paralelelor, lucrarea sa a devenit renumită ca fiind prima care conţine teoreme de geometrie neeuclidiană.

Cei mai mulţi din primii geometri care au susţinut că au demonstrat postulatul paralelelor presupuneau ca premisă explicită sau implicită diferite alte propoziţii cu aceeaşi forţă

‡ T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* I, p. 202 şi următoarea prezintă încercările semnificative.

§' P. 99.

deductivă ca aceea pe care încercau s-o demonstreze. De exemplu, John Wallis presupunea că pentru orice figură dată este posibil să existe o figură asemenea de orice mărime dorită. încercarea lui Saccheri a fost mult mai ingenioasă : el dorea să arate că postulatul paralelelor era un adevăr necesar deoarece rezulta din propria sa negaţie. Pentru a obţine această negaţie într-o formă convenabilă, el considera nu enunţul lui Euclid, ci un enunţ echivalent, sugerat de o figură din ediţia Clavius a lui Euclid. Din extremităţile unui segment liniar AB ridicăm, de aceeaşi parte a segmentului, două perpendiculare de aceeaşi lungime, AC şi BD, iar punctele C şi D le unim apoi printr-o dreaptă. în patrulaterul rezultat, unghiurile C şi D trebuie să fie egale şi se poate arăta că postulatul paralelelor al lui Euclid este echivalent cu ipoteza că ambele aceste unghiuri sînt unghiuri drepte. Drept care, Saccheri examinează celelalte două ipoteze care se pot concepe, şi anume : (I) că unghiurile sînt obtuze şi (II) că ele ar fi ascuţite. Aceste ipoteze corespund respectiv la cele două forme ale geometriei neeucli- diene care mai tîrziu au fost denumite geometrie eliptică şi geometrie hiperbolică. în cursul investigaţiei sale, el demonstrează unele teoreme caracteristice ale acestor geometrii. De exemplu, în propoziţia IX el arată că în ipoteza unghiului obtuz suma unghiurilor interne ale unui triunghi este totdeauna mai mare decît două unghiuri drepte, iar în ipoteza unghiului ascuţit această sumă este totdeauna mai mică. Dar încercarea sa de a demonstra postulatul paralelelor pornind de la considerarea celor două alternative posibile nu mai este atît de fericită. în cazul întîi, el pare să ajungă la rezultatul dorit cu multă uşurinţă, arătînd în propoziţia XII că ipoteza unghiului obtuz impune postulatul paralelelor (şi este aşadar autocontradictorie, deoarece postulatul paralelelor impune ipoteza unghiului drept). Dar el reuşeşte aceasta numai presupunînd în mod tacit că putem avea segmente liniare de orice mărime dorită. De fapt, această ipoteză este incompatibilă cu ipoteza pe care o consideră, deoarece în geometria eliptică trebuie să apară un maxim al lungimilor segmentelor liniare. Cealaltă ipoteză îi dă mult mai mult de lucru, şi deşi mai departe el se exprimă ca şi cum totul ar fi legat de *consequentia mirabilis,* de fapt el nici măcar nu încearcă să arate că această alternativă impune postulatul paralelelor. Dar el susţine că demonstrează în propoziţia XXIII că această alternativă implică o consecinţă

autocontradictorie. Desigur că dacă demonstraţia lui ar fi satisfăcătoare, ea ar fi suficientă, împreună cu propoziţia XII, pentru a stabili adevărul postulatului paralelelor; dar în raţionamentul său intervine o lacună.

Nu ştim în mod cert dacă opera lui Saccheri a avut vreo influenţă asupra matematicienilor care au dezvoltat geometria neeuclidiană în secolul al XlX-lea, dar cartea lui şi-a croit drum într-un şir de biblioteci şi a fost remarcată în unele lucrări de referinţă, cum ar fi lucrarea lui Montucla *Histoire des mathematiques* din 1758 sau aceea a lui Kliigel *Conatuwn Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio* din 1763[3]. Poate că astfel a atras ea atenţia lui Gauss (1777—1855), care a fost primul care a recunoscut posibilitatea dezvoltării unei geometrii neeuclidiene într-un mod consistent şi a considerat că această problemă trebuie să fie rezolvată observînd dacă în spaţiul fizic suma unghiurilor interioare dintr-un triunghi este sau nu egală cu două unghiuri drepte. Dar în acest domeniu al cercetării matematice, ca şi în multe altele în care a făcut descoperiri strălucite. Gauss n-a publicat nimic. Prima lucrare tipărită care dezvoltă o formă de geometrie neeuclidiană ca scop în sine a fost un memoriu al lui Lobacevski publicat în 1826. Acest memoriu se ocupa cu ipoteza unghiului ascuţit (adică cu geometria hiperbolică, în care printr-un punct trec două paralele la o dreaptă dată). Dezvoltarea ipotezei unghiului obtuz (adică a geometriei eliptice, în care printr-un punct dat nu se pot duce paralele la o dreaptă dată iar orice dreaptă dacă este prelungită revine la ea însăşi) avea să-l aştepte pe Riemann. în realitate, abia publicarea postumă, în 1867, a prelegerii inaugurale a lui Riemann din 1854, *Uber die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen,* i-a determinat pe matematicienii puri să ia în serios geometria neeuclidiană ; chiar şi mai tîrziu, speculaţiile lui Riemann şi ale elevului său Clifford cu privire la posibilitatea de a utiliza geometria neeuclidiană în fizică nu au fost luate în considerare timp de o întreagă generaţie.

Pentru logician, aceste rezultate din geometrie sînt importante datorită atenţiei pe care au atras-o asupra axiomaticii, adică a teoriei mulţimilor de postulate. Dacă s-ar fi arătat că s-a introdus o contradicţie prin negarea postulatului paralelelor al lui Euclid într-un sistem care reţinea celelalte axiome ale sale, s-ar fi demonstrat prin *reductio ad absurdum* că postulatul paralelelor rezultă din celelalte axiome. Pe de altă parte, eşecul încercării de a

descoperi vreo contradicţie nu este ca atare suficient pentru a demonstra consistenţa geometriei neeuclidiene. într-adevăr, ar fi necesar să se demonstreze că niciodată nu s-ar putea deriva vreo contradicţie. Iată o exigenţă foarte mare şi, după cum vom vedea mai încolo, greu de satisfăcut. Dar, fără a merge aşa de departe, putem încerca să stabilim respectabilitatea geometriei neeuclidiene arătînd că ea nu poate fi inconsistentă fără ca şi geometria euclidiană să fie inconsistentă; tocmai acest rezultat s-a obţinut de fapt în secolul trecut prin descoperirea posibilităţilor de reprezentare a geometriei neeuclidiene în cadrul sistemului lui Euclid. Dintre aceste reprezentări, cea mai cunoscută este aceea în care se presupune că în lista ce urmează expresia din stînga are în [**]

** Corrado Segre, „Conjetture intorno all'influenza di Girolamo Sacclieri sulla formazione della geometria non-euclidea", *Atti della Ii. A. delle Sciznze di Torino,* XXXVIII (1903).

geometria eliptică acelaşi sens pe care-l are expresia corespunzătoare din dreapta în geometria euclidiană:

plan	suprafaţă a unei sfere
linie dreaptă	arc mare de cerc
unghi format de două linii drepte	unghi format de planele a două cercuri mari.

Dacă celelalte expresii utilizate în geometria eliptică cu două dimensiuni păstrează semnificaţia obişnuită pentru asemenea expresii într-o geometrie euclidiană, atunci sistemul în ansamblu se transformă într-o geometrie pe suprafaţa unei sfere euclidiene, un studiu care este familiar în navigaţie. Toate propoziţiile specifice ale geometriei eliptice cu două dimensiuni sînt valabile în noua interpretare. Dintr-un punct dat nu se poate duce nici o paralelă la o dreaptă dată ; printre lungimile dreptelor există una maximă; suma unghiurilor interioare dintr-un triunghi este mai mare decît două unghiuri drepte. De aci rezultă că dacă geometria lui Euclid este consistentă, atunci şi geometria eliptică cu două dimensiuni[4] este consistentă. Utilizînd interpretări convena-. bile dar mult mai complicate, Felix Klein şi alţii au arătat că atît geometria eliptică cu trei dimensiuni cît şi geometria hiperbolică cu trei dimensiuni se pot reprezenta în geometria euclidiană. Aceasta nu înseamnă că geometriile neeuclidiene sînt identice cu porţiuni ale geometriei euclidiene ci numai că ele pot fi *aplicate* în interiorul geometriei euclidiene întrucîtva la fel cum suprafaţa Franţei ar putea fi aplicată pe o parte a suprafeţei Angliei.

Ce am putea spune despre statutul postulatului paralelelor? Dacă geometria lui Euclid este consistentă, atunci este clar că nu poate să apară o contradicţie *logică* nici prin negarea acestui postulat şi nici măcar prin conjuncţia negaţiei sale cu celelalte axiome ale lui Euclid, ceea ce înseamnă de fapt că ea este logic independentă de aceste axiome. Dacă cineva urmăreşte să susţină că postulatul este adevărat cu privire la liniile drepte din spaţiul fizic, s-ar putea să aibă dreptate; matematicianul pur nu se ocupă însă cu asemenea probleme. Dezvoltarea geometriilor neeuclidiene a produs în mod inevitabil o schimbare de atitudine a matematicienilor faţă de geometrie, inclusiv faţă de aceea a lui Euclid. Odată ce există diferite alternative, toate merită să fie studiate şi nu este sarcina matematicianului să aserteze axiome care să determine

vreuna din aceste alternative. Sarcina sa este de a spune doar ce urmează *in mod logic* dintr-o mulţime dată de axiome. Consi-

* Uneori denumirea de ,,eliptică" este rezervată pentru geometria în care se identifică punctele de la antipozi; în acest caz, sistemul considerat mai sus se numeşte geometrie sferică. dcrarca geometriei tradiţionale în acest chip a trebuit în mod natural să conducă la cererea de a se formula în mod explicit toate ipotezele şi presupunerile sale, adică de a se aplica în mod riguros programul pe care l-am atribuit lui Euclid. Rezultatele s-au putut vedea în prezentarea modernă a geometriei lui Euclid, ca de exemplu în *Grundlagen der Geometrie* din 1899 a lui Hilbert. Dar acest fel de a considera geometria a condus, de asemenea, şi la o abstracţie care s-a îndepărtat mult de preocupările lui Euclid.

Atunci cînd o propoziţie rezultă logic din alta, ar trebui să fie posibil să formulăm cele două propoziţii astfel încît să se vadă că relaţia dintre ele depinde numai de forma lor, adică de ceea ce se numeşte structura lor logică, spre deosebire de conţinutul material specific. Or, aceasta se poate face pentru propoziţiile din geometrie. In prezentările uzuale ale geometriei euclidiene forma axiomelor nu se pune lesne în evidenţă deoarece utilizăm anumite semne speciale ca „punctul", „dreapta", „planul", „se află pe", „între", „paralel cu" şi „congruent", dar toate axiomele de care avem nevoie pentru geometria euclidiană obişnuită le putem scrie fără a utiliza vreun semn particular, cu excepţia cuvîntului „punct" şi a expresiei *„A* este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D" care exprimă congruenţa ca o relaţie cu patru termeni între puncte. Astfel, în loc de „C este coliniar (se află pe aceeaşi dreaptă) cu A şi B" putem spune „dacă P şi Q sînt două puncte oarecare astfel încît A este la aceeaşi distanţă de P cum este A faţă de Q, iar B este la aceeaşi distanţă de P cum este B faţă de Q, atunci C este la aceeaşi distanţă de P cum este C faţă de Q". Iar în loc de „C este între A şi B" putem spune „C este coliniar cu A şi B şi există trei puncte P, Q şi R astfel încît (I) P este coliniar cu A şi B, şi (II) P este la aceeaşi distanţă de A cum este P faţă de B, (III) Q este la aceeaşi distanţă de P cum este P faţă de A, (IV) R este la aceeaşi distanţă de P cum este P faţă de A, (V) C este coliniar cu Q şi R şi (VI) C este la aceeaşi distanţă de Q cum este C faţă de R". în loc de „linia AB este paralelă cu linia

CD” putem spune : „clasa punctelor coliniare cu A şi B şi clasa punctelor coliniare cu C şi D nu au nici un membru în comun". Nici măcar cuvîntul „punct” nu e necesar să fie folosit; într-adevăr, putem fără vreo primejdie să lăsăm să se înţeleagă că lucrurile sau elementele pe care le notăm cu cîte o literă sînt entităţi convenabile în calitate de termeni ai relaţiei cvater- nare pe care am menţionat-o în axiome, natura acestor entităţi fiind indiferentă. Evident, în acest mod este foarte anevoios să scriem o mulţime de formule axiomatice suficientă pentru geometria euclidiană obişnuită, dar dacă aceasta ar fi sarcina, este clar că în afară de expresia „A este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D” unicele cuvinte utilizate ar fi acelea pe care le rezervăm pentru a exprima forma. adică „şi”, „sau”, „nu”, „dacă”, „orice”, „există”, precum şi litere care servesc drept variabile. Deoarece teoremele se pot exprima şi ele în aceeaşi notaţie, putem să stabilim în mod neîndoielnic că implicarea teoremelor de către axiome nu depinde de semnificaţia expresiei „A este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D” atunci cînd o aplicăm la lucrurile pe care le percepem.

Dacă am ajuns atît de departe, putem să facem încă un pas şi să spunem că pentru geometria pură semnificaţia uzuală a expresiei de mai sus este cu totul nerelevantă. Dacă am avea o altă expresie cu patru locuri libere, care să-i poată fi substituită în mod consistent în toate formulele axiomelor, atunci am putea substitui acea expresie şi în formulările teoremelor, fără ca să se schimbe ceva în relaţiile dintre teoreme şi axiome. în propoziţiile sale atît de abstracte, geometrul nu afirmă decît că orice relaţie cu patru termeni care satisface toate condiţiile logice prescrise în formulările axiomelor trebuie să satisfacă şi toate condiţiile logice stipulate în toate formulările teoremelor ; dacă îi place, el poate să sublinieze acest lucru utilizînd în locul expresiei de mai sus o singură literă, în mare măsură aşa cum Aristotel folosea literele în formularea principiilor silogisticii sale. Condiţiile exprimate în diferitele formule ale geometriei de către celelalte semne sînt de o complexitate pe care Aristotel nu a luat-o în consideraţie, dar cu toate acestea ele sînt pur logice.

Uneori se spune că formulele axiomelor unui sistem de geometrie, luate toate la un loc, ar constitui o *definiţie implicită* a semnelor geometrice particulare care figurează în

ele. Acest fel de a vorbi, care a fost introdus încă în 1818 de către J. D. Gergonne®, este util dar poate conduce la neînţelegeri. Formulele axiomelor unui sistem geometric definesc o expresie extralogică pe care o conţine numai în sensul că ele delimitează domeniul logic în care trebuie să se afle semnificaţia acestei expresii. într-adevăr, ele impun doar condiţii formale; şi deşi un geometru care utilizează expresia „A este la aceeaşi distanţă de B cum este C faţă de D", în lucrările sale de specialitate nu trebuie să se ocupe de nimic în afară de condiţiile formale pe care le satisface această relaţie de congruenţă; în utilizarea ei uzuală expresia are o semnificaţie care nu este epuizată de către aceste condiţii. Dacă lucrurile n-ar sta astfel, n-ar avea sens să vorbim de o aplicare a geometriei la lumea pe care o percepem: doar de o asemenea aplicare depinde stabilirea unei relaţii perceptibile care satisface o mulţime de condiţii formale fără a fi epuizată de ele. Pe scurt, o inteligenţă pură, care nu

• ,,Essai sur la th^orie des d&initions", *Annales de iques,* IX (1818) pp. 1—35, în special p. 23.

percepe lucrurile din spaţiul fizic, ar putea studia geometria în mod abstract, dar cunoaşterea geometriei nu i-ar putea servi de înlocuitor al percepţiei care îi lipseşte. Odată clarificată această chestiune, vedem că dezvoltarea geometriei neeuclidiene nu respinge — cum au crezut unii filosofi — vechiul punct de vedere al lui Euc[1]id şi Kant, după care postulatul paralelelor este un adevăr necesar referitor la spaţiul pe care îl percepem. într-adevăr, se poate argumenta cel puţin că condiţiile logice prescrise de către axiomele geometriei euclidiene au loc cu necesitate pentru relaţia de congruenţă percepută. Dacă însă lucrurile stau astfel, enunţul acestei valabilităţi nu constituie un adevăr al logicii formale şi deci nu este un adevăr al geometriei în sensul în care utilizează în prezent cuvîntul „geometrie" specialiştii în matematica pură. Pentru scopurile matematicii este suficient ca condiţiile prescrise de axiomele geometriei neeuclidiene să fie consistente, adică să nu conducă la autocontradicţie, iar procedura de reprezentare sau aplicare a arătat că nici geometria eliptică, nici cea hiperbolică nu pot fi inconsistente fără ca şi axiomele geometriei euclidiene să fie inconsistente.

Atunci cînd în matematica pură intervine cuvîntul „spaţiu” şi alte cuvinte asemănătoare, ele se referă la scheme abstracte de ordonare care pot fi exemplificate în mare măsură prin diferite sisteme de obiecte. Desigur că studiile geometrice au început cu luarea în considerare a relaţiilor din spaţiul fizic, dar ele au progresat pînă la luarea în considerare a unor scheme care nu pot fi vizualizate. Această tendinţă spre abstracţie poate fi detectată deja în geometriile neeuclidiene pe care le-am menţionat, dar ea este şi mai evidentă în geometriile cu multe dimensiuni. Asemenea geometrii se pot construi „sintetic”, aşa cum a făcut-o Euclid, dar abordarea cea mai lesnicioasă a acestor noţiuni este aceea promovată de către Descartes în geometria „analitică”. Atunci cînd trasăm grafice, concepem fiecare punct al hîrtiei noastre cu pătrate ca fiind determinat de către două numere, unul din ele fiind o valoare a variabilei *x,* iar celălalt o valoare a variabilei *y,* şi spunem că o linie de pe hîrtie corespunde cu o anumită relaţie funcţională între aceste două variabile. Astfel, o linie dreaptă este graficul unei ecuaţii de formă $y = ax + b,$ deoarece fiecare punct de pe linie este asociat, datorită sistemului de referinţă, cu un cuplu de numere care satisfac o asemenea ecuaţie. Avem aici o interpretare a geometriei euclidiene cu două dimensiuni, potrivit căreia punctele sînt perechi de numere iar relaţiile dintre puncte sînt nişte relaţii de felul celor studiate în algebră. O atare interpretare se poate aplica uşor şi geometriei euclidiene cu trei dimensiuni. Dar nu trebuie să ne oprim aici. Aplicînd analogia în sens invers, putem, dacă dorim, să utilizăm limbajul geometriei pentru a descrie un sistem în care entităţile aflate în relaţie sînt mulţimi de valori pentru patru variabile sau chiar mai multe. Astfel, dacă $(x_{lt}\ y_{lt}\ z_{lt}\ w_x)$ şi $(x_2,\ y_2,\ z_2,\ w_2)$ reprezintă doiiă mulţimi de valori pentru cele patru variabile *x, y, z* şi *w,* putem eventual să găsim convenabilă utilizarea cuvîntului „distanţă” pentru cantitatea reprezentată prin

V [(*1 — *2? + (ji — *ytf* + (ᶻi — ᶻ*2)*² + (ʷi — ʷ*i)*²*l*

Indiferent dacă abordează sau nu geometria multidimensională pe calea deschisă de către Descartes, matematicienii ataşează 6 interpretare numerică formulelor-axiome pentru demonstrarea consistenţei diferitelor geometrii pe care ei le construiesc în mod axiomatic. Se

poate arăta că admiterea geometriei eliptice şi hiperbolice cu trei dimensiuni este consistentă în ipoteza că geometria euclidiană cu trei dimensiuni este consistentă, iar întrebarea cu privire la consistenţa acesteia din urmă ar putea părea excesivă. Dar nu este deloc evident că spaţiul fizic ar fi spaţiul euclidian în sensul că ar satisface toate axiomele lui Euclid. Nu putem, de exemplu, să susţinem cu seriozitate că percepem o infinitate de puncte situate dincolo de un punct dat, sau o infinitate de puncte situată între puncte date ; dacă spunem că spaţiul fizic este totuşi euclidian în deplinul înţeles al cuvîntului, trebuie să susţinem că cunoaştem aceasta ca un adevăr necesar relevat prin intuiţie spaţială. în cursul secolului al XlX-lea, asemenea susţineri au devenit suspecte, astfel încît s-au făcut încercări de a elibera geometria de balastul dependenţei de datele simţurilor. Pentru matematician, demonstraţiile de consistenţă a mulţimilor de axiome cu ajutorul interpretărilor numerice au marele merit de a rămîne în întregime în cadrul matematicii.

Consistenţa este prima pretenţie faţă de orice mulţime de axiome, într-adevăr, o conjuncţie de propoziţii inconsistente ar atrage după sine orice altă propoziţie, după cum au remarcat cu privire la *consequen- iiae* autorii din evul mediu, iar din cercetarea unui sistem în care nega-l ţia fiecărei teoreme este ea însăşi o teoremă nu avem nimic de învăţat. Independenţa reciprocă a axiomelor nu este esenţială în acelaşi mod. Cu alte cuvinte, nu se poate spune că un sistem deductiv nu mai are valoare atunci cînd se descoperă că una dintre axiome poate fi derivată din celelalte. Dar este evident lipsit de eleganţă să introducem ca axiomă ceva care poate fi demonstrat ca teoremă. în afară de aceasta, demonstraţiile de independenţă sînt necesare pentru o bună înţelegere a structurii sistemului investigat. Ambele chestiuni sînt bine ilustrate de istoricul postulatului paralelelor. în prezent, pentru a demonstra că o axiomă este independentă de celelalte axiome ale unei mulţimi date este suficient să arătăm că negaţia ei este consistentă cu mulţimea acestor alte axiome; or, în acest scop geometrul foloseşte o dată mai mult metoda interpretării numerice.

Dacă două interpretări diferite de speţă oarecare ale semnelor extra- logice care figurează într-o mulţime de formule axiomatice conduc amîndouă la adevăruri şi dacă sistemele de lucruri descrise de formule în aceste

interpretări sînt astfel legate încît pentru fiecare entitate[††] [‡‡] dintr-o interpretare corespunde o singură entitate din cealaltă, spunem că cele două interpretări sînt izomorfe. Dacă, în plus, *toate* rezultatele interpretărilor posibile (interpretări care uneori se mai numesc modele) pentru o anumită mulţime de formule axiomatice sînt izomorfe între ele, atunci spunem că mulţimea axiomelor este categorică sau monomorfă. Această noţiune îi era familiară lui Dedekind încă în 1887[8], dar denumirea de „categoric" a fost introdusă de Veblen în 1904, la propunerea logicianului Dewey[7]. Probabil că Veblen şi Dewey se gîndeau la contrastul dintre propoziţiile categorice şi cele disjunctive ; dar la origine „categoric" înseamnă mai curind „predicativ" decît „nedisjunctiv" şi în plus acest cuvînt are dezavantajul de a fi suprasolicitat în alte contexte. De aceea pare mai convenabil să-l urmăm pe Carnap, vorbind mai degrabă despre contrastul dintre mulţimile de axiome monomorfe şi cele polimorfe[8].

Se poate spune că o mulţime monomorfă de axiome îndeplineşte complet programul definiţiei implicite. Deşi formulele prin care este prezentată o asemenea definiţie pot admite interpretări variate, acestea din urmă trebuie să aibă toate aceeaşi structură logică şi, ca atare, sînt indiscernabile prin criterii pur formale. Dacă o mulţime de axiome este monomorfă, atunci nu are sens să încercăm alte specificări ale semnificaţiei semnelor extralogice care intervin în formulele ei, adăugind diferite formule de axiome cu acelaşi simbolism. în adevăr, oricare formulă am alege, fie ea însăşi, fie negaţia ei, este deja o consecinţă a formulelor axiomatice în sensul că este adevărată pentru oricare interpretare pe care o admit ele. Ceea ce nu înseamnă însă că o mulţime monomorfă de axiome nu poate fi extinsă cu utilitate în nici un fel. Monomorfismul este întotdeauna relativ la un anumit

---

††Aici, prin *entităţi* (în original: „items") autorii au în vedere elementele, proprietăţile, relaţiile şi legile de compoziţie ale sistemelor respective (Nota trad.).

‡‡ *Was sind und was sollen die Zahlen* ? § 134.

[7] „A System of Axioms for Geometry", *Transactions of the American Mathematical Society,* V (1904), pp. 343—381.

[8] *Einfilhrung in die symbolische Logik,* § 42 C.

* în teoria abstractă a grupurilor, în care se presupune că elementele nu sînt neapărat întotdeauna operaţii, este necesar să se specifice separat că combinarea a trei elemente este asociativă şi că există un element-identitate.

aparat de concepte primitive, după cum se poate vedea cel mai clar prin examinarea unui alt exemplu din geometrie.

în cursul întregului secol al XlX-lea, geometria s-a dezvoltat nu numai prin examinarea alternativelor posibile în ce priveşte postulatul paralelelor al lui Euclid sau prin înlăturarea restricţiei acestuia în ce priveşte numărul dimensiunilor (trei), dar şi prin distincţia care s-a făcut cu privire la diferitele niveluri ale proprietăţilor geometrice. Se ştia de mult timp că există anumite proprietăţi ale figurilor, care rămîn valabile chiar dacă figurile sînt supuse la anumite tipuri de transformări. De exemplu. Pascal (care a folosit metode propuse de Desargues, în particular utilizarea punctelor de la infinit) a demonstrat în secolul al XVII-lea că dacă un hexagon este înscris într-o secţiune conică, atunci cele trei puncte în care se intersectează laturile opuse trebuie să se afle pe o dreaptă. Deoarece teorema este valabilă nu numai pentru un hexagon înscris într-un cerc dar şi pentru orice hexagon care se obţine proiectînd figura respectivă pe un plan dintr-un punct, este clar că aici avem de-a face nu cu o proprietate metrică, ci cu una proiectivă; ceea ce revine la a spune că teorema aparţine acelui nivel al geometriei în care se examinează poziţiile relative fără a face să intervină măsurătoarea. Există alte proprietăţi ale figurilor, care rămîn în vigoare chiar în cazul unor transformări mai drastice decît proiecţia. Dacă, de exemplu, desenăm un pătrat în interiorul unui cerc, pe o peliculă de cauciuc, figura care era iniţial interioară rămîne interioară, deşi poate înceta să mai fie pătrat sau chiar rectilinie. Aici avem de-a face cu o proprietate care ţine de nivelul şi mai adînc al topologiei, în cadrul căreia nu numai că nu se ţine seama de distanţă, dar nici măcar de deosebirea dintre o linie dreaptă şi una curbă. Cînd definim o geometrie de un nivel dat, este convenabil să utilizăm limbajul lui Klein şi să spunem că geometria studiază toate proprietăţile care sînt invarianţi faţă de unele operaţii care ţin de un anumit grup. Prin „operaţii" înţelegem aici transformări cum ar fi translaţiile şi rotaţiile în spaţiu, proiecţiile paralele sau centrale, precum şi deformările descrise mai sus; iar prin „grup" înţelegem o mulţime de operaţii, astfel încît *(a)* rezultatul aplicării succesive a oricăror două operaţii din mulţime să fie şi el o operaţie din această mulţime şi *(b)* inversa oricărei operaţii din mulţime să fie de asemenea o operaţie din

această'mulţime. Întîmplător, această noţiune de grup, care a fost concepută pentru prima oară de^Galois (1811 — 1832), este una din cele mai înalte abstracţii care în prezent îşi găsesc aplicaţie în multe şi diferite domenii ale matematicii[9].

Pentru ţelurile noastre important este că mulţimea de axiome a unei geometrii de nivel mai coborît poate fi monomorfă deşi', desigur, ea nu implică toate teoremele care ţin de geometriile de nivel mai ridicat. Am văzut că propoziţiile geometriei metrice euclidiene obişnuite pot fi toate formulate cu ajutorul unui singur semn special pentru relaţia de congruenţă cu patru termeni. în acelaşi memoriu în care a introdus cuvîntul „categoric" pentru a descrie anumite mulţimi de axiome, Veblen arăta că toate propoziţiile unui sistem mai profund — numit geometrie descriptivă — ar putea fi formulate utilizînd un singur semn special pentru relaţia *între* cu trei termeni, adică relaţia de ordine serială. Deoarece „între" se poate defini cu ajutorul congruenţei iar geometria metrică conţine teoreme care nu intervin în geometria descriptivă, s-ar putea crede că o mulţime de axiome pentru aceasta din urmă ar trebui inevitabil să fie polimorfă. Dar lucrurile nu stau astfel. Mulţimea de axiome a lui Veblen pentru geometria descriptivă este monomorfă *relativ la relaţia „între".* Dacă axiomele sale ar fi reformulate utilizînd definiţia lui „între" amintită mai sus, atunci mulţimea rezultată ar fi într-adevăr polimorfă, dar *relativ la congruenţă.*

Deoarece pentru ţelurile specificării o mulţime monomorfă de axiome nu poate fi extinsă în mod util cu ajutorul unor noi axiome exprimate în acelaşi simbolism, ea este în acest sens completă. Dar există un sens mai tare al cuvîntului „complet", iar în acest sens un sistem deductiv cu o mulţime monomorfă de axiome poate totuşi să fie incomplet. Pentru a înţelege această chestiune trebuie să concepem completitudinea ca fiind definită prin referire la demonstraţie şi legată de principiul terţului exclus aproape în acelaşi fel cum este consistenţa legată de principiul necontradicţiei. Să alegem o propoziţie a cărei expresie nu pretinde semne extralogice primitive, ci numai semnele existente într-o mulţime dată de axiome. Atunci, dacă mulţimea de axiome este consistentă, ea trebuie să nu permită atît demonstrarea acestei propoziţii, cît şi demonstrarea negaţiei ei. Iar dacă ea

este completă în sensul tare pe care-l considerăm acum, ea trebuie să ne furnizeze fie demonstraţia propoziţiei, fie demonstraţia negaţiei ei. La prima vedere, această cerere de completitudine seamănă cu cererea de monomorfism pe care am menţionat-o mai sus, şi anume că axiomele trebuie să aibă drept consecinţă fie propoziţia dată, fie negaţia ei; dar în realitate ea este mai stringentă. în adevăr, se poate întîmpla ca o propoziţie exprimabilă în simbolismul unei mulţimi monomorfe de axiome să fie o consecinţă a axiomelor şi totuşi să nu poată fi dedusă din ele deoarece derivarea ar fi infinit de lungă şi deci nu ar fi o demonstraţie. Vom vedea mai tîrziu că de fapt aceasta este situaţia în unele porţiuni foarte importante ale matematicii.

2. *Numere şi funcţii*

Am văzut că demonstraţiile de consistenţă ale geometrilor utilizează în mod obişnuit interpretări numerice ale mulţimilor de axiome. Procedînd în acest fel, geometrii speră să elibereze ştiinţa lor de orice ipoteze extramatematice. Dar pe ce se întemeiază acea parte a matematicii care se ocupă cu numerele? Pentru a da o interpretare numerică satisfăcătoare oricărui sistem de geometrie care cuprinde noţiunea de continuitate, o presupune sau o implică, trebuie să utilizăm asemenea numere ca V^2 şi 7t, ceea ce încă în antichitate a ridicat unele semne de întrebare.

Printr-o argumentare care în prezent nu ne este clară, pitagoreicii se autosugestionau că au găsit cheia înţelegerii universului în noţiunea de *ratio,* adică în conceptul de raport dintre două numere naturale. Fără îndoială că ei au fost impresionaţi de importanţa raportului în muzică şi poate că au fost influenţaţi de faptul că Xoyoţ, cuvîntul grecesc pentru *ratio,* este în acelaşi timp cuvîntul obişnuit pentru raţiune, motiv sau explicaţie. Sau poate că, la început, ei au utilizat acest cuvînt doar în sens matematic. Dar, oricare ar fi temeiurile tezelor lor metafizice, fapt este că au fost profund zguduiţi de descoperirea incomensurabilităţii diagonalei cu latura pătratului. Aici, într-un caz foarte simplu, se arăta că a vorbi despre raportul dintre lungimile a două linii conduce la o contradicţie, deşi bunul simţ părea să sprijine filosof ia, atunci cînd insista că totdeauna trebuie să existe un anumit raport determinat; în mod evident, diagonala era mai mare decît o treime din latură, dar nu atît de mare cît o jumătate. Eudoxus a salvat situaţia construind o teorie generală a

proporţiilor, care era suficientă pentru geometrie, iar teoria sa (care ni s-a păstrat în cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid) este un remarcabil op de filosofie a matematicii. Punctul ei central îl constituie o nouă definiţie a egalităţii rapoartelor dintre mărimi:

„Fiind date patru mărimi, spunem că prima se află îu acelaşi raport cu a doua ca a treia cu a patra atunci cînd înmulţind prima şi a treia mărime cu un factor oarecare, dar acelaşi, şi cu alt factor oarecare a doua şi a patra, dacă multiplul primei mărimi este mai mic decît cel al celei de-a doua, multiplul celei de-a treia este de asemenea mai mic decît cel al celei de a patra, dacă multiplul primei este egal cu cel al celei de a doua, multiplul celei de a treia este de asemenea egal cu cel al celei de a patra iar dacă multiplul primeia este mai mare decît cel al celei de a doua, multiplul celei de a treia este de asemenea mai mare decît cel al celei de a patra.”

în realitate, aceasta înseamnă că atunci cînd nu putem vorbi despre un raport în sens strict pitagoreic (adică un anumit raport dintre numere naturale), putem totuşi vorbi despre un raport în sens generalizat dacă se poate arăta că fiecare raport în sens strict pitagoreic este fie prea mic, fie prea mare. Cu alte cuvinte, existenţa unui raport în sens generalizat se identifică cu posibilitatea de a distribui toate rapoartele pitagoreice în două clase care se exclud reciproc: clasa rapoartelor prea mici şi a celor prea mari. Se ştie actualmente că această propunere este utilizată şi astăzi în analiza matematică, adică într-o ramură a matematicii care se ocupă cu mărimi ce variază continuu; dar, pentru a examina această temă dintr-o perspectivă convenabilă trebuie în primul rînd să avem în vedere dezvoltarea conceptului de număr de la greci încoace.

Probabil că primele numerale erau adjective, cum ar fi „unu”, „doi”, „trei”. în limba elină şi în multe alte limbi, asemenea cuvinte, sau cel puţin unele dintre ele, se declină ca şi adjectivele obişnuite, dar este evident că ele nu explică substantivele în acelaşi chip în care o fac adjectivele. într-adevăr, deşi un om care spune că are doi cîini mari înţelege să comunice că fiecare din aceştia este mare, cu siguranţă că el nu vrea să spună că fiecare din ei este doi. Aceasta sună cam enigmatic, dar pare şi mai curios că în unele limbi, inclusiv limba noastră, aceleaşi sunete sau semne se utilizează adesea ca nume proprii. De exemplu, noi spunem: „doi este cel mai mic număr prim”. Obişnuim să vorbim despre numere ca şi cum ele ar fi obiecte distincte atît de mulţimea lucrurilor pe care le numărăm, cît şi de numeralele pe care le utilizăm pentru a număra; căci ceea ce este

adevărat cu privire la numărul doi, nu poate fi negat în ce priveşte o pereche de cîini sau de cuvinte. Or, despre aşa ceva nu putea fi vorba înainte de dezvoltarea aritmeticii ca un calcul. în adevăr, avem destule indicii care arată că pe vremea lui Platon lucrurile acestea nu le veneau grecilor atît de uşor. în *Theologumena Arithmeticae,* care înainte i se atribuia lui Iamblichus, există un citat din Speusip, elev al lui Platon, care denotă o remarcabilă incertitudine a limbajului[§§]. Pasajul se referă la doctrina pitagoreică cu privire la caracterul perfect al numărului zece, şi într-un număr redus de fraze el conţine nu mai puţin de patru denumiri diferite pentru numărul zece, şi anume vi 8£xa, 6 **TWV** 8£xa âpiOp.6?, 6 3exa şi 8exa. Prima înseamnă literalmente „cele zece (lucruri)", a doua „numărul celor zece (lucruri)", a treia „(numărul) zece", iar a patra exact „zece". Mai departe, cînd Speusip vrea să spună că patru este un multiplu al lui doi, el emite un enunţ straniu în care semnul pentru patru este tratat ca şi cum ar fi un plural neutru, pe cînd semnul pentru doi ca şi cum ar fi un singular masculin.

în afară de adjective cum ar fi „unu", „doi", „trei", chiar şi limbile cele mai primitive au termeni numerici ca „jumătate", „o treime", „un sfert"; dar utilizarea în calitate de numere a unor semne cum ar fi — 1, -|-, ^2 şi ^/— 1 este produsul ultimelor cîtorva secole. Ca şi utilizarea numeralelor în calitate de nume proprii, această dezvoltare este legată de elaborarea calculelor matematice. Ea a fost inspirată mai ales de către Descartes, care a aplicat simbolismul algebric la geometrie.

Să începem prin a presupune că examinarea unei probleme ne-a condus la formularea ecuaţiei $x + 3 = 2$. De exemplu, poate că vrem să ştim cîţi bani avea cineva la bancă înainte de a fi ajuns la soldul 2 primind 3. Evident, ecuaţia nu poate fi rezolvată deloc în termenii numerelor naturale, dar dacă admitem folosirea numerelor negative, atunci putem scrie: $x = -1$. Putem reprezenta asemenea numere în mod convenabil marcînd pe o linie intervale egale la stînga unui punct denumit 0:

-3-2-1 0 1 2 3

§§ Ed. de Falco, 82.10 şi urm., retipărit în *Greek Mathematical Works,* sub redacţia lui Ivor Thomas, I, pp. 75 şi următoarele.

în al doilea rînd, numere ca 3/2 trebuie să fie admise dacă avem de rezolvat ecuaţii de felul ecuaţiei *2.x* — 3 = 0. Odată cu acestea am sporit în mod enorm numerele ce se pot reprezenta prin puncte pe o dreaptă. într-adevăr, între oricare două fracţii putem întotdeauna să găsim alta; aceasta este totuna cu a spune că în fiecare interval finit, cum ar fi cel dintre numerele 0 şi 1, avem o infinitate de fracţii. Nu trebuie însă să presupunem că odată cu această extindere am identificat numerele corespunzătoare cu toate punctele dreaptei: dacă construim un pătrat a cărui latură este o unitate de lungime, iar apoi trasăm diagonala sa pornind de la origine, punctul final al diagonalei nu face parte dintre acele puncte pentru care avem deja numere atribuite. Dar această lacună, ca şi o infinitate de altele, se acoperă printr-o nouă extindere a conceptului de număr, astfel încît acesta să cuprindă şi iraţiona[1]ele algebric?, cum ar *îi'y/2,* şi iraţionalele transcendentale (adică nealgebrice) cum ar fi 7t. Primele sînt legate de necesitatea rezolvării unor ecuaţii cum ar fi x^2 — 2 = 0, iar celelalte sînt necesare pentru a completa continuul liniar. în sfîrşit, o a patra extindere ne permite să recunoaştem numărul „imaginar"

—1 ca rădăcină proprie a ecuaţiei $z^2 + 1 = 0$. Aici, impulsul spre extindere pare a fi provenit în întregime din algebra formală. Pe dreaptă nu avem vreun punct corespunzător cu ^/—-l, iar matematicienii din secolul al XVIII lea, care utilizau imaginarele, făceau aceasta numai pentru ca să fie mai simple şi mai generale calculele lor. însă, atît timp cit imaginarele erau admise numai din aceste motive, statutul lor părea foarte misterios. Dacă un elev întreba care este justificarea utilizării lor, profesorul nu prea avea ce să-i răspundă decît: „lucrează şi te vei convinge singur!". Această aparenţă de mister a fost împrăştiată atunci cînd Wes;el în 1797 şi Argand în 1806 au arătat care este modul de a lega imaginarele de mişcarea în plan. în geometria analitică a lui Descartes numerele sînt corelate cu puncte în conformitate cu *distanţa* acestora din urmă de anumite coordonate; dar e posibil de asemenea să concepem un număr ca un vector sau ca o măsură a *deplasării* pe care trebuie s-o efectueze o particulă pentru a atinge un punct. în cadrul unei asemenea scheme, multiplicarea unui vector cu —1 reprezintă în mod evident schimbarea sensului mişcării. Ce ar putea fi mai natural şi mai satisfăcător decît a spune

că multiplicarea unui vector cu **A/ — 1** reprezintă rotaţia cu un unghi drept, adică o operaţie a cărei repetare produce răsturnarea completă? Cel puţin aşa 'au conceput chestiunea cei mai mulţi studenţi în matematică; şi faptul că şi în prezent această interpretare ne procură bucurie dă unele indicaţii cu privire la stînjeneala pe care trebuie să o fi resimţit matematicienii pe vremea cînd nu se cunoştea vreo cale de a lega acest simbol cu intuiţia spaţială.

Cînd vorbim de extinderile succesive ale conceptului de număr, sîntem înclinaţi să credem că istoria se poate rezuma printr-o schemă de felul următor, în care denumirile scrise cursiv denumesc noi tipuri de numere ce se adaugă stocului iniţial:

Naturale i
? întregi >
Negative J I Raţionale i
Fracţionare' ? Reale >
Iraţionale ' ? Numere
Imaginare

în mod evident, întregii sînt denumiţi astfel în opoziţie cu fracţiile, denumirea de număr raţional se opune numărului iraţional, cea de număr real numărului imaginar, iar sistemul de denumiri sugerează în mod natural o clasificare după specie şi gen. Dar acest fel de a descrie dezvoltarea este eronat. Trebuie mai curînd să vorbim de o ierarhie a cinci tipuri diferite de numere în cadrul căreia fiecare tip mai înalt conţine o submulţime corespunzătoare fiecărui tip mai coborît. în schema următoare, fiecare tip este reprezentat printr-o linie orizontală, iar corespondenţele sînt indicate prin linii verticale punctate:

Numere complexe :-------
Numere reale !-------;------;--------
Numere raţionale •—:---j------ş------[1]
întregi cu semn —j—_J
Numere naturale

întregul pozitiv -ţ-2 nu este acelaşi lucru cu numărul natural 2, iar obiceiul nostru de a scrie 2 în locul semnului +2 este justificat doar de faptul că regulile noastre de calcul

cu întregii pozitivi corespund exact cu regulile de calcul pentru numerele naturale. La fel, într-o teorie riguroasă trebuie să distingem numărul raţional +2/+1 atît de numărul întreg pozitiv -|-2 cît şi de numărul natural 2, deşi în calcul ignorarea deosebirii nu dă loc la eroare. în egalitatea

$$^{1} + \underset{2}{7} + \underset{4}{\mathrm{T}} + \underset{8}{} \bullet\bullet\bullet = ^{2}$$

utilizăm acelaşi semn 2 iarăşi într-un fel nou, şi anume ca semn al unui număr real. în anumite contexte putem chiar să-l folosim ca o abreviere pentru semnul mai lung 2 + 0 5/ — 1, adică în calitate de semn al unui număr complex a cărui parte imaginară este nulă.

Fiecărui nivel mai înalt din diagrama noastră îi corespunde un tip cu totul nou, reprezentat printr-o linie orizontală, deşi matematicienii, uitînd să recunoască acest lucru, au utilizat adesea un nume nou numai pentru acea parte a tipului care este reprezentată de porţiunea proiectată a liniei. Şi, cu o singură excepţie, ordinea dezvoltării este fixată, adică nu putem avea un calcul al numerelor complexe înainte de a avea un calcul al numerelor reale, sau un calcul al numerelor reale înainte de a avea un calcul al numerelor raţionale. Excepţia se referă la numerele cărora li se atribuie un semn : dacă vrem, am putea introduce distincţia dintre numerele pozitive şi cele negative abia după introducerea numerelor raţionale sau chiar după introducerea numerelor reale. Se pare chiar că de fapt oamenii au folosit o notaţie specială pentru fracţii înainte de a fi vorbit despre numere negative. Dar schema propusă mai sus este cea mai simplă deoarece ea stabileşte o ordine de apariţie a numerelor negative, raţionale şi iraţionale care corespunde cu ordinea obişnuită a operaţiunilor inverse de care ele sînt istoriceşte legate, adică scăderea, împărţirea şi extragerea rădăcinii pătrate.

Cîmpul numerelor naturale este închis faţă de operaţiile de adunare, înmulţire şi ridicare la putere; adică, cu excepţia unor cazuri particulare în care intră numărul O, obţinem întotdeauna în final un număr natural atunci cînd adunăm un număr natural cu altul sau înmulţim un număr natural cu altul, sau ridicăm la putere. Dar acest cîmp nu este închis faţă de operaţia de scădere. Pe de altă parte, cîmpul numerelor întregi (cu semn) este închis faţă de toate

cele patru operaţiuni menţionate pînă acum, însă nu este închis faţă de împărţire. în căutarea unui cîmp în care realizarea acestei operaţii este întotdeauna posibilă trebuie să trecem la considerarea numerelor raţionale. însă în acest chip nu putem realiza întotdeauna operaţiunea de extragere a rădăcinii. Astfel, sîntem conduşi la considerarea cîmpului numerelor reale, în care toate numerele pozitive au rădăcini de orice grad dorim, şi în final ajungem la numerele complexe, în cadrul cărora toate operaţiunile pe care le-am menţionat se pot realiza fără vreo restricţie. în afară de acestea, mai există şi alte operaţiuni (cum ar fi luarea limitei unui şir infinit convergent) care se pot realiza deja în cîmpul numerelor reale, dar cîmpul numerelor complexe prezintă un interes deosebit, deoarece tocmai aici îşi găseşte cea mai largă aplicaţie noţiunea de *funcţie.*

în limbajul matematic, cuvîntul „funcţie" se utilizează pentru a indica o operaţie care atunci cînd este aplicată la o anumită entitate care se numeşte argumentul ei (sau la o mulţime ordonată de entităţi, dacă funcţia are mai mult decît un singur argument) furnizează o anumită entitate denumită (foarte ciudat) valoarea funcţiei pentru acest argument. Sau, dacă cuvîntul „operaţie" sugerează prea mult intervenţia oamenilor, putem spune că considerarea matematică a unei funcţii este echivalentă cu considerarea unei relaţii între o entitate (în mod normal unică) numită valoare a funcţiei şi altă entitate numită argument al funcţiei. Foarte frecvent relaţia se exprimă printr-o ecuaţie funcţională de forma $y = f(x)$ în care litera x este variabilă independentă luînd drept valori argumentele funcţiei, iar litera y este variabila dependentă care ia drept valori valorile funcţiei pentru diferitele argumente posibile. Uneori se mai spune că o funcţie este *de la* o anumită clasă (care este domeniul tuturor argumentelor posibile ale funcţiei) *la* o altă clasă, domeniul tuturor valorilor posibile ale funcţiei.

Această definiţie modernă*** este astfel alcătuită încît se poate aplica deja în cadrul domeniului numerelor naturale. De exemplu, putem spune că funcţia exprimată prin n^2 ia valoarea 4 pentru argumentul 2. Dar terminologia provine din mecanică şi istoriceşte este asociată cu conceptul de variaţie continuă. La origine, cuvîntul „variabilă", care în

*** Luată în esenţă din A. Church, *Introduction io Mathematical Logic,* § 03.

prezent este utilizat pentru literele care intervin într-un anumit mod în texte matematice, era folosit pentru mărimi fizice care variază în timp, cum ar fi distanţa de la o particulă la alta sau presiunea unui gaz, iar în formulele de felul $y = /(x)$ literele x şi y erau considerate ca abrevieri ale unor expresii ca „a trecut timpul” sau „a fost străbătută distanţa”. Cînd specialiştii în matematica pură au început să vorbească despre variabile şi funcţii, ei au procedat astfel pentru că îi interesau tiparele matematice ale unor anumite legi fizice; dar ei nu mai puteau spune că literele astfel folosite ar fi abrevieri pentru expresii ca cele menţionate mai sus, iar uzanţele pe care le-au adoptat, în particular obiceiul de a denumi variabile literele înseşi, au generat numeroase confuzii şi nedumeriri.

Uneori se spunea că literele numite variabile denotă numere variabile, iar în alte dăţi se spunea că ele denotă în mod variabil şi ambiguu toate numerele care sînt valorile lor. Ambele explicaţii sînt lipsite de sens. într-adevăr, numerele nu variază, iar variaţiile care pot avea loc în denotarea semnelor nu prezintă interes pentru matematicieni. S-a mai spus: „O variabilă y este o funcţie de altă variabilă x dacă pentru orice valoare determinată a lui x, sau cel puţin pentru orice valoare determinată dintr-un anumit domeniu dat, există cel puţin o valoare a lui y, asociată cu ea conform cu o anumită regulă”. Această explicaţie ar fi fost poate satisfăcătoare dacă cuvîntul „variabilă” s-ar fi referit la o mărime fizică; dar ea este cu totul nesatisfăcătoare atunci cînd cuvîntul se referă la o literă, deoarece ea sugerează că o funcţie este o literă sau în orice caz un simbol de un anume fel, deşi este cît se poate de lămurit că matematicienii care se ocupă cu teoria funcţiilor nu sînt angajaţi într-o ramură a lingvisticii. Probabil că nici un matematician angajat în activitatea sa n-a fost vreodată derutat în mod serios de asemenea observaţii; în orice caz, este prea tîrziu pentru a ne mai gîndi la abandonarea vechii terminologii ce dă loc la atîtea necazuri. Dar chestiunea merită să fie notată deoarece cuvîntul „funcţie” a fost extins şi mai mult în logica modernă; şi fără îndoială că aici s-a ajuns la neînţelegeri serioase.

Pentru acelaşi motiv, merită să remarcăm că într-un text matematic o expresie funcţională împreună cu o variabilă poate să apară cel puţin în două moduri diferite. Cînd un matematician scrie

$$. \qquad \sin x$$

$$\text{tg } X \text{ - -------} \quad \text{COS } X$$

litera *x* participă la un simbolism universal cu ajutorul căruia matematicianul stabileşte un enunţ cu privire la toate numerele. Pentru acest scop simbolismul este foarte util, deoarece el *sugerează* ceea ce se petrece în realitate, şi anume că ori de cîte ori vom înlocui peste tot în ecuaţii litera *x* cu un număr oarecare, vom obţine cîte un enunţ adevărat. Mai mult, putem raţiona fără grijă cu privire la ecuaţiile din majoritatea contextelor *ca şi cum* acest *x* ar fi el însuşi un număr. Atunci însă cînd un matematician afirmă „vom examina acum funcţia tg *x,"* litera *x* nu mai exprimă universalitate şi nu mai este clar ce rol gramatical trebuie să atribuim simbolului complex tg *x.* Dacă, aşa cum se spune uneori, litera *x* serveşte aici doar pentru a marca un loc gol, atunci cu greu expresia tg *x* ar putea fi nume al unei funcţii, după cum nici „tată al lui ..." nu este nume al unei relaţii în limba vorbită uzuală. Dar putem vorbi destul de bine despre funcţia *exprimată prin* simbolul complex tg *x,* după cum putem vorbi despre relaţia exprimată prin „tată al lui...", iar expresia matematică comună, citată mai sus, poate fi eventual considerată ca o abreviere a acestui fel de a vorbi. Vom vedea mai încolo că lipsa de atenţie acordată acestei chestiuni a dezorientat uneori pe unii logicieni care au adoptat limbajul funcţiilor pentru propriile lor ţeluri.

Evident, nu putem utiliza expresiile numerice de tip mai înalt în acelaşi fel în care utilizăm numeralele obişnuite : nu are sens să spunem că în cameră se află 5 -f- 3^/ — 1 persoane. Atunci de ce continuăm să vorbim despre *numere* în cursul acestei dezvoltări ? Se pare că extinderea pe care o dăm conceptului de număr este în realitate o extindere a utilizării cuvîntului „număr" în vederea acoperirii unor entităţi de diferite tipuri şi că aceasta se justifică doar prin posibilitatea de a calcula cu simbolurile pentru aceste diferite entităţi după aceleaşi reguli fundamentale din algebră, adică regulile comutative:

$$x + y = y\,x \text{ şi } xy = yx,$$

regulile asociative:

$$(*+?) + z = x + (y + \text{z}) \text{ şi } (xy)z = x(yz)$$

şi regula distributivă:

$$x(y \text{ -ţ- } z) = xy \text{ -j- } xz.$$

Un sistem de numere în sens generalizat este în realitate

tocmai o mulţime de entităţi pentru care toate aceste legi sînt valabile *dacă adunarea şi înmulţirea sînt definite în mod convenabil.* Acest din urmă detaliu este important, deoarece noţiunile de adunare şi înmulţire, adecvate calculului cu numere naturale, nu se pot aplica într-un calcul cu numere de alt tip. De exemplu, dacă vrem să vorbim de înmul-| ţirea numerelor întregi, trebuie să începem prin a explica ce înţelegeri în acest context prin cuvîntul „înmulţire", adică următoarele regul: de semn:

$$(H^{-a})(-F\hat{}) = -fab,\ (+\#)(-b) = -ab,\ (-<z)(-b) = -|-ab.$$

Aceasta revine la a spune că legile fundamentale din algebră sînt sistematic ambigue sau, mai bine : că ele determină într-un mod abstract anumite condiţii logice pe care trebuie să le satisfacă operaţiile din orice calcul pe care îl denumim calcul cu numere.

Pînă la introducerea numerelor complexe inclusiv, evoluţia a fost inconştientă în sensul că matematicienii extindeau utilizarea cuvîn- tului „număr" fără a-şi da seama exact de ceea ce fac. Fără îndoială că ei erau călăuziţi de respectarea a ceea ce G. Peacock a numit în 1833 „principiul permanenţei formelor echivalente"††† ‡‡‡, adică îi urmărea dorinţa de a păstra regulile generale din algebră pe care le-am enunţat mai sus. Dar fiecare element nou ei îl concepeau ca ceva la care erau constrînşi, ca o generalizare pe care trebuiau s-o adopte pentru a putea rezolva problemele puse într-o etapă precedentă ; ei nu considerau algebra făcînd abstracţie de exemplificările ei şi nici nu încercau să inventeze calcule noi de dragul generalizărilor cît mai extinse posibil. în secolul al XlX-lea situaţia s-a schimbat. în primul rînd, unii matematicieni distinşi au început să conceapă algebra într-un mod abstract. Am amintit mai sus de Peacock; dar au fost şi alţii. D. F. Gregory, de exemplu, a scris în 1838 un memoriu intitulat *Cu privire la natura reală a algebrei simbolice*§§§ ****, iar De Morgan a publicat între 1839 şi 1844 patru memorii cu privire la *Fundamentele algebrei*[1]*. în al doilea rînd, au fost încercări de a inventa

††† „Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analy- ■is", *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of*

‡‡‡*Science, held in 1833,* pp. 185 — 352, în special pp. 198 — 207.

§§§*" Transactions of the Royal Society of Edinburgh,* XIV (1840), pp. 208 — 216.

**** *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* VII, pp. 173 —187,287 — 300; 7III, pp. 139-142, 241-254.

calcule noi. H. Grassmann, de exemplu, a publicat în 1844 o carte despre *Ausdeh- nungslehre,* care încerca să realizeze proiectul lui Leibniz de calcul geometric. Iar începînd din 1844, cînd şi-a publicat primul său memoriu cu privire la cvaternioni, Sir William Rowan Hamilton din Dublin a cheltuit o mare cantitate de energie pentru a perfecţiona o algebră nouă a numerelor hipercomplexe. însă este interesant de observat că Hamilton n-a lucrat totalmente în gol. Toate eforturile sale erau inspirate de dorinţa de a elabora un calcul care să facă pentru mişcarea în spaţiul tridimensional ceea ce teoria numerelor complexe părea să facă, într-un mod foarte satisfăcător, pentru mişcarea în plan. Aşa cum numerele complexe se pot pune sub forma *x* 4- *yi,* unde litera *i* este o abreviere pentru ^/—1, tot astfel cvaternionii săi se pot pune sub forma *x -f- yi -f- zj wk,* unde literele *i, j* şi *k* reprezintă rotaţii în trei plane perpendiculare două cîte două. Dar spre deosebire de teoria numerelor complexe, sistemul său nu satisface toate regulile de bază din algebră. Pentru a menţine celelalte reguli, el a trebuit să abandoneze comutativitatea înmulţirii şi să declare *ij = —ji.* Din acest motiv, cvaternionii nu sînt recunoscuţi în mod unanim ca numere. Acelaşi lucru se poate spune despre alte propuneri, cum ar fi matricile, care ar putea fi eventual concepute ca o extindere a conceptului de număr dincolo de domeniul numerelor complexe, într-adevăr, în prezent este binecunoscut că nu poate avea loc vreo extindere fără a se sacrifica una sau alta dintre regulile care determină semnificaţia cuvîntului „număr", aşa cum a fost utilizată în matematică pînă acum. Aceasta nu înseamnă că ar fi stupid să vorbim despre numere hipercomplexe, ci numai că o asemenea uzanţă se justifică doar printr-o analogie parţială.

Ce puteau gîndi matematicienii -cu privire la această evoluţie de la numerele naturale la numerele complexe, în perioada desfăşurării ei ? Fiecare pas nou producea la început un sentiment de neplăcere, iar după oarecare timp pasul părea inevitabil. Cel puţin pînă la numerele reale inclusiv, progresul era călăuzit de considerente spaţiale; şi chiar numerele imaginare, care iniţial au fost introduse pentru a menţine generalitatea unor tipare de calcul, au fost acceptate ca obiect pe deplin respectabil al vorbirii matematice numai după ce au fost incorporate într-o teorie a numerelor complexe care admitea o interpretare spaţială. Dar foarte curînd după ce evoluţia principală a fost încheia-

tă, au apărut dubii cu privire la soliditatea intuiţiei spaţiale ca bază pentru aserţiuni asupra continuului numerelor reale. Aceste dubii nu se datorau vreunei dificultăţi în aplicarea matematicii şi nici vreunei influenţe a geometrei neeuclidiene, ci proveneau mai curînd din descoperiri efectuate chiar în interiorul analizei matematice. S-a constatat, de exemplu de către B. Bolzano în 1830, iar mai tîrziu şi de către Weierstrass, că anumite funcţii continue nu sînt derivabile[18]. în limbaj geometric aceasta pare să însemne că ar exista curbe continue fără tangentă. Iar apoi au urmat paradoxuri şi mai surprinzătoare Unul din cele mai izbitoare se referă la densitatea punctelor raţionale de pe un segment. Să presupunem că numerele 0 şi 1 au fost atribuite la două puncte de pe o dreaptă şi că ne-am decis să aşezăm cîte e mică bară deasupra fiecărui punct, care este astfel pus în corespondenţi cu numerele raţionale: †††† ‡‡‡‡
Deoarece între oricare două fracţii există o infinitate de alte fracţii, pare firesc să presupunem că barele se vor intersecta şi că suma lungimilor lor va fi inevitabil mai mare decît unitatea, oricît de mici ar fi barele individuale. Dar nu este aşa. într-adevăr, dacă considerăm fracţiile dintre 0 şi 1 în ordinea

112 13 12 3
23344555

şi apoi atribuim primei fracţii o bară de lungime egală cu o zecime de unitate, celei de-a doua fracţii o bară de lungime egală cu o sutime de unitate, celei de-a treia o bară de lungime egală cu o miime de unitate şi aşa mai departe, atunci suma lungimilor tuturor acestor bare va ti abia

$$- + — + — + \ldots = -\bullet\ 10 \quad 10\text{»}\ IO^{3} \qquad 9$$

E adevărat că nu putem trasa cu creionul toate aceste bare, dar este evident că regula noastră de procedură atribuie o lungime determinată pentru bara fiecărei fracţii discernabile, întrucît fiecare asemenea fracţie îşi găseşte locul în ordinea noastră.

îndată ce s-a pus sub semnul întrebării soliditatea intuiţiei spaţiale ca sursă a cunoaşterii matematice, a devenit necesar să se reexamineze toate demonstraţiile acceptate în mod curent, iar rezultatul a fost reconstruirea radicală a

†††† Demonstraţia lui Bolzano din lucrarea sa *Funktionenlehre* a fost publicată ab
‡‡‡‡în 1930.

matematicii de către oameni de talia lui Cauchy (1789—1857) şi Weierstrass (1815—1897). în adevăr, s-a spus că înainte de secolul al XlX-lea în analiză nu se demonstrase nimic în mod satisfăcător. Or, în analiză, exact ca şi în geometrie, rigoarea pretinde formularea explicită a fiecărui lucru care este esenţial pentru o demonstraţie; şi astfel, în secolul al XlX-lea atenţia este orientată spre formulele care furnizează definiţii implicite ale diferitelor tipuri de expresii numerice. Indiferent dacă aceste formule sînt considerate ca reguli speciale de calcul sau ca axiome din care urmează să se derive teoreme în concordanţă cu legile generale ale logicii, ceea ce se cere este ca ele să fie complete şi recunoscute ca fundamentale. Dar este firesc să ne întrebăm de unde luăm tocmai asemenea formule. Există □are o necesitate inerentă în cursul evoluţiei care ne-a condus la adoptarea lor ? Sau ele sînt convenţii făcute de noi înşine, ce-i drept sugerate de interesul pentru descrierea naturii sau de tendinţa către gene- alitatea abstractă în matematică, dar totuşi inapte de a fi probate ocmai datorită faptului că sînt convenţii ? Aceste întrebări au fost)use în secolul al XlX-lea şi continuă să fie dezbătute în zilele noastre, ’oate că cea mai bună cale pentru a face faţă acestei probleme constă n a arăta că antiteza dintre descoperire şi invenţie a fost concepută eronat. Este cert că matematicienii pot construi calcule în serviciul propriilor lor scopuri speciale, după cum este la fel de cert că ei nu sînt în întregime liberi în alegerea convenţiilor lor. Dacă vrem, putem spune că Hamilton a inventat cvaternionii, dar trebuie să adăugăm că nici el, nici oricare altul n-ar fi putut face un sistem de numere hipercomplexe care să satisfacă toate legile algebrei ce sînt valide pentru numerele complexe. Oricum ar fi, primul pas înspre clarificarea soluţiei a fost formularea exactă a regulilor diferitelor calcule care-şi cîştigaseră deja recunoaşterea, iar aceasta s-a realizat în secolul al XlX-lea.

în fiecare etapă a extinderii conceptului de număr avem de-a face cu entităţi de tip nou, definite implicit prin regulile de operaţie ale calculului nou. Dar în anumite contexte în care de obicei vorbim de numere întregi cu semn sau de numere raţionale am putea spune tot ceea ce intenţionăm să spunem fără a ne referi la numere de tip nou. Astfel, în loc de a scrie egalitatea 3 — 5 = —2, putem scrie 3 2 = = 5; iar în loc de $\frac{}{3} =$ —, putem scrie 5 X 6 = 10 X 3. Chiar şi atunci cînd găsim că este convenabil să recurgem la numere

întregi cu semn sau la numere raţionale, le putem considera ca fiind perechi ordonate de numere selecţionate dintr-un tip imediat inferior şi supuse la anumite reguli speciale de operaţii. De exemplu, calculul cu numerele întregi cu semn se poate dezvolta pe baza unor reguli ca:

(a, b) = (c, d) dacă şi numai dacă a + d = b + c, şi
{a, b) + (c, *'d) = (a + c, b + d)*
(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc).

Ea prima vedere această procedură pare insolită, dar pentru a obţine metoda uzuală de reprezentare n-avem decît să scriem +« şi —*a* ca abrevieri pentru cele două forme standard *(a,* 0) şi (0, *a)* la care sînt reductibile noile noastre expresii numerice în conformitate cui regulile speciale pentru egalitate. Regulile specifice ale calculului cu numerele raţionale sînt fireşte diferite, dar nu mai complicate. însă nu aici se încheie posibilităţile explicaţiilor cu ajutorul perechilor ordonate ; în 1835, Hamilton arăta că şi calculul cu numere complexe poate fi prezentat ca un calcul cu perechi ordonate de numere reale, dacă ele sînt însoţite de reguli convenabile pentru egalitate, adunare, înmulţire etc. Dacă s-ar fi putut arăta că discursul referitor la numere reale ar fi legat într-un mod întrucîtva asemănător cu cel referitor la numere raţionale, lanţul s-ar fi completat şi am fi putui spune — în terminologia lui Bertrand Russell — că toate numerele de tip superior sînt construcţii logice pornind de la numerele naturale. Aceasta revine la a spune că n-ar mai fi necesar să introducem numerele de tip superior ca entităţi noi, descoperite cu ajutorul intuiţiei continuităţii spaţiale sau temporale, deoarece, în principiu, tot ce spunem cu privire la ele ar fi echivalent cu nişte expresii foarte complicate, relative însă la numerele naturale şi proprietăţile lor. Acest program, care a servit drept inspiraţie pentru o filosofie mult mai tîrzie, se numeşte aritmetizarea analizei.

Din nefericire, numerele reale au adus matematicienilor moderni tot atîta bătaie de cap ca şi şcolii lui Pitagora. Aceasta întrucît calculul cu numere reale nu poate fi prezentat ca un calcul cu mulţimi *finite* de numere raţionale. îndată ce începem să lucrăm cu numere reale, ne angajăm într-o discuţie cu privire la infinit, cu toate dificultăţile care decurg de aici. Aceasta se poate vedea în mod limpede din

examinarea a două teorii a numerelor reale care au fost formulate în secolul trecut.

Prima din ele a fost propusă de către Weierstrass şi dezvoltată de către Cantor. De fapt, ea conduce la identificarea unui număr real cu un şir infinit de numere raţionale pe care le numim de obicei aproximările sale succesive. Aşa, de exemplu, în aritmetica elementară avem o procedură pentru extragerea rădăcinilor pătrate, şi aplicînd-o etapă cu etapă putem obţine valoarea lui ^/2 cu cîte zecimale dorim. Deoarece *^2* este un număr iraţional, procedura nu conduce niciodată la o încheiere, adică la o expresie zecimală care se termină printr-o mulţime de 9-uri sau printr-o perioadă recurentă de cifre, deşi expresia „obţinem valoarea lui *'\J2"* ne-ar putea face să credem că avem vreo expresie zecimală completă, că adică *"\J2* este de aceeaşi natură cu numerele pe care le numim aproximări ale sale. După Cantor, numărul real *yJ2* se poate identifica cu şirul

1,4
1,41
1,414
1,4142

je care-l obţinem atunci cînd calculăm la început prima zecimală, ipoi două, apoi trei, apoi patru şi aşa mai departe. Şirul este poteii- :ial infinit, dar noi putem stabili reguli pentru a-l recunoaşte ca număr leoarece succesiunea termenilor săi este fixată printr-o lege.

A doua teorie a numerelor reale, care a fost elaborată de către Dedekind în lucrarea sa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* din 1872, este o versiune modernă a teoriei rapoartelor a lui Eudoxus. Deşi nu putem găsi vreun număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2, totuşi putem împărţi numerele raţionale în mod exhaustiv în două clase : clasa celor al căror pătrat este mai mare decît 2 şi clasa celor al căror pătrat nu este mai mare decît 2. După Dedekind, "\/2 este tocmai tăietura care divide numerele raţionale în acest fel. Dacă aceasta sună prea paradoxal, putem spune că "\/2 este mulţimea infinită a numerelor raţionale care satisface condiţia a doua; într-adevăr, locul tăieturii este unic determinat de structura mulţimii inferioare, iar această

formulare prezintă avantajul de a fi mai uşor comparabilă cu celelalte definiţii ale numerelor de tip superior. în ce priveşte întregii, numerele raţionale şi numerele complexe, ele sînt definite ca mulţimi de numere de tip imediat inferior; dar aici, ca şi în schema lui Cantor, mulţimea utilizată pentru definiţia unui număr real trebuie să fie infinită. Cele două teorii pentru numerele reale sînt echivalente în sensul că un calcul construit după prescripţia lui Cantor, deşi se referă la şiruri infinite, are aceeaşi structură ca şi calculul cu tăieturile lui Dedekind. Şi aceasta nu e surprinzător, deoarece un şir infinit convergent este un instrument convenabil pentru localizarea unei tăieturi Dedekind.

Definiţia numerelor reale cu ajutorul mulţimilor infinite de numere raţionale pare satisfăcătoare în sensul că ne dă ceea ce aşteptăm în calculul numerelor reale şi leagă acest calcul de cel precedent, al numerelor raţionale. Dar această definiţie nu ne permite aritmetiza- rea analizei, dacă înţelegem prin aceasta ceea ce se pare că era concepţia lui Kronecker, reducerea tuturor enunţurilor matematice la enunţuri despre numere naturale. într-adevăr, un enunţ care se referă la o mulţime *infinită* de numere raţionale nu poate fi redus în sensul strict al cuvîntului, aşa cum poate fi redus un enunţ care se referă numai la o mulţime finită de numere raţionale particulare. Iar dacă renunţăm la programul reducerii complete, încă ne mai rămîne dificultatea de a demonstra consistenţa regulilor speciale pe care le adoptăm pentru calculul nostru al numerelor reale. Cum se poate face aceasta fără a reveni la problema iniţială, adică la problema existenţei numerelor pe care presupunem că le definesc regulile ? Deşi această critică nu a fost efectuată în amănunt în cursul secolului al XlX-lea, ea a fost totuşi suficient de bine înţeleasă pentru a tulbura minţile unor matematicieni. Frege, de exemplu, ca şi Kronecker, n-a fost niciodată complet satisfăcut de teoriile pentru numerele reale, care erau curente în epoca lui. în capitolele următoare vom avea prilejul de a considera mai îr amănunt unele dintre aceste dificultăţi.

3. *Boole şi algebra logicii*

Geometria şi algebra au contribuit în diferite moduri la dezvoltarea logicii matematice. După cum am spus în prima secţiune din acest capitol, geometria a furnizat un domeniu în care se putea lucra cu noţiunile axiomaticii, în timp ce

algebra a furnizat un model care putea fi imitat pentru stabilirea unui calcul logic. încă în secolul al XVII-lea, Leibniz şi-a dat seama că există o anumită asemănare între disjuncţia şi conjuncţia conceptelor, pe de o parte, şi adunarea şi înmulţirea numerelor, pe de altă parte, dar el nu a fost în stare să formuleze exact în ce constă asemănarea, şi deci n-a fost în stare s-o utilizeze ca bază pentru un calcul logic. Tocmai aceasta a realizat George Boole (1815—1864) în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic*[1§§§§ *****]. Ideea că formulele algebrice ar putea fi utilizate pentru a exprima relaţii logice i-a venit pentru prima oară pe cînd era încă adolescent, lucra ca supraveghetor la o şcoală particulară din Ijncoln şi se auto- instruia prin numeroase lecturi. Dar interesul renăscut pentru logică, ce ha condus să scrie această broşură în 1847, se pare că s-ar datora publicării în periodice a faimoasei controverse în cadrul căreia Sir William Hamilton din Edinburg* îşi susţinea prioritatea în ce priveşte doctrina cuantificării predicatelor, îl acuza pe Augustus De Morgan de plagiat şi făcea observaţii nemaipomenite împotriva matematicii ca element în instrucţie şi educaţie. înainte de a-şi publica lucrarea, Boole i-a scris lui De Morgan, ale cărui preocupări le împărtăşea, dar acesta tocmai terminase lucrarea sa *Formal Logic* şi a propus ca cele două cărţi să fie publicate înainte ca ei să se consulte asupra rezultatelor obţinute. Cele două cărţi au apărut aproximativ în acelaşi timp; după o anecdotă, ele ar fi ajuns în librării în aceeaşi zi.

Deşi curiozitatea lui Boole pentru logica matematică a fost stimulată de o dispută întîmplătoare, faptul că cu puţin înainte de a-şi fi scris el lucrarea avusese loc o dezbatere importantă asupra naturii algebrei nu este, desigur, o întîmplare. Avem toate motivele să presupunem că el citise unele dintre lucrările lui Peacock, Gregory, De Morgan şi Sir William Rowan Hamilton pe care le-am menţionat în secţiunea precedentă. Gregory, apropiat publicaţiei *Cambridge Mathematical Journal,* era un prieten apropiat care i-a dat încredere în posibilităţile sale de matematician. Afară de aceasta, interesul estetic al lui Boole pentru matematică l-a condus să dea o înaltă apreciere tuturor tentativelor de realizare a generalităţii abstracte. Reputaţia

§§§§[16] O dare de seamă cu privire la viaţa lui Boole a se vedea la W. Kneale, „Boole ind the Revival of Logic", *Mind,* LVII (1948), pp. 149—175.

***** ■ A nu se confunda cu sir William Hamilton Rowan, matematicianul despre care -a Vorbit în secţiunea precedentă (Nota trad.).

sa era deja stabilită datorită unui studiu despre *A General Method in Analysis,* publicat în 1844, în care el a adus contribuţii la generalizarea raţionamentului algebric utilizînd în mod liber calculul cu operatori sau, cum se spunea pe atunci, separarea simbolurilor.

Din lucrările publicate anterior, Boole putea să extragă două descoperiri importante: (I) că este posibilă o algebră cu entităţi care nu sînt numere în sensul obişnuit al cuvîntului şi (II) că legile valabile pentru tipurile de numere pînă la cele complexe inclusiv nu trebuie să fie menţinute în întregime într-un sistem algebric care nu se aplică la asemenea numere. Cu geniul său generalizator, el şi-a dat seama că o algebră se poate dezvolta ca un calcul abstract apt de diferite interpretări. Punctul de vedere asupra logicii pe care l-a dezvoltat el pornind de la această viziune este enunţat în mod lămurit în primul paragraf al lucrării sale *Mathematical Analysis of Logic:*

„Cei care cunosc starea actuală de lucruri din teoria algebrei simbolice îşi dau seama că validitatea proceselor de analiză nu depinde de interpretarea care se dă simbolurilor utilizate, ci numai de legile după care se combină ele. Orice sistem de interpretare care nu afectează adevărul relaţiilor presupuse este la fel de admisibil şi tocmai de aceea aceleaşi procese, în cazul unei anumite scheme de interpretare, pot reprezenta soluţia unei probleme referitoare la proprietăţi ale numerelor, pe cînd în altă interpretare ele pot reprezenta soluţia unei probleme geometrice, iar într-o a treia soluţia unei probleme de dinamică sau optică ... Am putea spune pe bună dreptate că un calcul adevărat se caracterizează prin aceea că el este o metodă ce se întemeiază pe utilizarea simbolurilor cu legi de combinaţie cunoscute şi generale şi cu rezultate care admit o interpretare consistentă. Faptul că formelor existente din Analiză li se atribuie o interpretare cantitativă este rezultatul circumstanţelor în cadrul cărora au fost determinate aceste forme şi nu trebuie ridicat la rangul de condiţie universală a Analizei. Tocmai întemeindu-mă pe acest principiu general, îmi propun să stabilesc Calculul logicii şi susţin că locul său este printre formele recunoscute ale Analizei matematice, deşi în ce priveşte obiectivul şi instrumentele sale el trebuie să ocupe în prezent un loc aparte."

Exemplarele primei ediţii' al broşurii lui Boole sînt în prezent rare şi nu putem presupune că s-au vîndut multe. în anul următor însă, el a publicat o scurtă dare de seamă asupra Calculului logicii în publicaţia *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* şi aceasta a avut parte de o lectură mai amplă în rîndurile matematicienilor. El nu adaugă aci nimic la teoria din broşură, dar uneori este mai uşor de urmărit; el încheie cu un paragraf care prezintă foarte

lămurit poziţia sa :

„Punctul de vedere pe care-l prezintă aceste încercări asupra naturii limbajului este foarte interesant. Ele îl prezintă nu ca o simplă colecţie de semne, ci ca un sistem de expresii ale cărui elemente sînt supuse legilor gîndirii pe care o reprezintă. Faptul că aceste legi sînt tot aşa de matematic riguroase ca şi legile care guvernează conceptele pur cantitative de spaţiu şi timp, de număr şi mărime, este o concluzie pe care nu ezit s-o supun scrutărilor celor mai amănunţite".

în 1849, Boole a fost chemat la catedra de matematică de la Queen's College, Cork, pe atunci nou întemeiat, şi îndată a început să pregătească o carte mai amplă despre teoria sa logică. în această perioadă a vieţii sale el obişnuia să spună că ştiinţa despre gîndire era obiectul său de studiu iar matematica era o activitate recreativă. Aceasta nu înseamnă că în matematică el n-a fost productiv (în perioada aceea a scris note cu privire la cvaternioni), dar cea mai mare parte a energiei sale el şi-a consumat-o pentru a se familiariza cu scrierile filosofilor asupra fundamentelor logicii. Rezultatul activităţii sale a fost *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded The Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Această carte, care a fost publicată în 1854 din fondurile lui Boole şi ale unui prieten al său, nu s-a vîndut prea bine, dar a fost citită de mulţi care nu văzuseră broşura *Mathematical Analysis of Logic* şi este adesea considerată ca fiind capodopera lui Boole. Noutatea principală a cărţii constă în aplicarea ideilor sale la calculul probabilităţilor. în rest, cartea nu prea era originală. Din punct de vedere formal nu apăreau schimbări importante şi nici nu se poate spune că ideile principale sînt prezentate mai precis decît în lucrarea anterioară. Există însă unele exemple lucrate şi unele pasaje metafizice care sînt interesante fie şi pentru lumina pe care o aruncă asupra lecturilor lui Boole.

Spre sfîrşitul vieţii sale, Boole spunea că nu-l satisfăceau expunerea şi aşezarea materiei din această carte şi regreta că nu a lucrat de două ori mai mult pentru prelucrarea ideilor prezentate pentru prima oară în *Mathematical Analysis of Logic.* Cu un an înainte de moarte, îi scria lui Jevons că era foarte ocupat cu pregătirea unei noi ediţii a cărţii sale de ecuaţii diferenţiale, dar spera că îndată ce se va elibera va scrie iarăşi logică şi deci îşi propunea să amîne lectura lucrării lui Jevons pentru ca să fie exclusă orice

neînţelegere cu privire la originile vederilor sale. Este interesant să discutăm asupra schimbărilor pe care le-ar fi efectuat revăzînd *Laws of Thought,* dar selecţiile care s-au publicat din manuscrisele ultimilor săi ani arată că ceea ce avea în vedere era mai curînd o dezvoltare a opiniilor sale epistemologice decît vreo modificare a laturii formale a cărţii. în aceste memorii el menţionează în particular o deosebire între logica claselor (adică calculul său al logicii) şi o logică superioară, mai comprehensivă, care nu se poate reduce la un calcul dar despre care se poate spune că ar fi „filosofia *oricărei* gîndiri care se poate exprima în semne, indiferent de obiectul acelei gîndiri”†††††. De aceea nu pare probabil că dacă ar fi lucrat mai mult ar fi dat o carte mai bună. Atunci cînd a început să caute bazele logicii în gîndirea umană, el a pornit pe o cale greşită. în adevăr, unul din meritele sale principale este că a eliberat logica de sub dominaţia epistemologiei şi a pregătit astfel renaşterea ei ca ştiinţă independentă. Prima ruptură cu tradiţia confuză din secolele XVII şi XVIII a fost realizată de către Bolzano, el însuşi un matematician filosof, dar tocmai lucrarea lui Boole a fost aceea care a arătat lămurit că logica poate fi studiată cu profit fără vreo referire la procesele minţii noastre. El nu avea nici un fel de îndoieli că operează cu legi ale gîndirii într-un anumit sens psihologic al acestei expresii ambigue, dar de fapt el opera cu unele dintre legile cele mai generale a ceea ce poate fi gîndit.

în vederea expunerii sistemului lui Boole este convenabil să începem cu interpretarea cu care a pornit, după toate probabilităţile, şi din care a obţinut concepţia sa cu privire la calculul logicii. Să j tesu- punem că litere ca *x* şi *y* reprezintă clase şi că semnul =, aşezat între două semne care reprezintă clase, arată că aceste clase au aceiaşi membri. Atunci, intersecţia a două clase, adică acea clasă care constă din toate lucrurile care aparţin ambelor clase, poate fi reprezentată printr-un simbol complex cum ar fi *xy.* Această

---

††††† *Studies in Logic and Probability* de George Boole (ed. de R. Rhees), 1952, p. 14. Pe lingă cîteva opere mai scurte, publicate în timpul vieţii, ca de ex. *Analiza matematică a logicii,* această colecţie conţine fragmente din articolele aflate în posesia Societăţii Regale şi în special un manuscris intitulat „Despre teoria matematică a logicii şi despre interpretarea filosofică a metodelor şi proceselor ei”. Probabil Boole n-a fost destul de mulţumit cu aceste lucrări pentru a le trimite unei reviste şi De Morgan, care le-a văzut după moartea lui Boole, a hotărît să nu fie publicate. Mulţumim lui W. Mays pentru copiile corespondenţei din 1863 şi 1864 dintre Boole şi Jevons.

convenţie este sugerată de felul în care alăturăm adjectivele atunci cînd vrem să specificăm mai îndeaproape anumite clase. Putem vorbi, de exemplu, de clasa lucrurilor mari, roşii, pătrate. De fapt, Boole nu face o distincţie prea netă între adjective şi simbolurile claselor; uneori el numeşte literele *x, y, z* etc. simboluri *elective,* concepîndu-le ca simboluri care selectează, atrag atenţia asupra unor anumite lucruri.

însă între diferitele clase care se pot distinge există două cazuri limită pentru care este convenabil să avem simboluri speciale. Acestea sînt clasa *universală,* adică acea clasă căreia îi aparţine ca membru orice lucru, şi clasa *nulă,* adică acea clasă căreia nici un lucru nu-i aparţine ca membru. în simbolismul lui Boole, ele sînt reprezentate respectiv prin simbolurile 1 şi 0. Această uzanţă poate că i-a fost sugerată de convenţiile pentru măsurarea probabilităţilor, dar oricum ea are marele merit de a fi în concordanţă cu dorinţa sa de a păstra cît mai mult posibil în cadrul calculului nou al logicii formalismul algebric obişnuit. în adevăr, cele două ecuaţii $1x = x$ şi $Ox = 0$ sînt amîndouă valide atît în interpretarea de clasă pe care am dat-o acum, cît şi în interpretarea numerică obişnuită. Dar apropierea de notaţie nu trebuie să ne ascundă faptul că introducerea noţiunilor de clasă universală şi clasă nulă cuprinde o noutate interesantă. După cum am văzut, Aristotel şi-a îndreptat atenţia spre termenii generali care nu erau nici universali în sensul de a se aplica la orice lucru şi nici nuli în sensul de a nu se aplica la nici un lucru. Atunci cînd Boole scria despre clasa universală şi despre clasa nulă, el realiza o extindere importantă a uzanţei obişnuite în ce priveşte cuvîntul „clasă". Dacă el şi-ar fi dezvoltat în mod consecvent această nouă utilizare, el ar fi fost condus mult mai departe de schema aristotelică decît a dorit-o vreodată. Or, mai tîrziu s-a descoperit că utilizarea nerestrictivă a noţiunii de clasă universală poate conduce la paradoxuri serioase, în practică, Boole ia semnul său 1 în sens de acel *univers al vorbirii* pe care-l utilizează De Morgan, adică pentru el 1 nu este totalitatea tuturor obiectelor de orice tip care se pot concepe, ci mai curînd ansamblul unei anumite categorii de lucruri care sînt supuse investigării. De exemplu, într-un context în care se presupune că termenii „britanic" şi „străin" determină clase complementare, universul discursului este omenirea[‡‡‡‡].

---

‡‡‡‡*• A. De Morgan, *Formal Logic,* p. 55.

Deoarece simbolismul lui Boole pentru intersecţia claselor seamănă în mod evident cu simbolismul mult anterior pentru înmulţirea numerelor, s-a luat obiceiul de a se numi intersecţia a două clase produsul lor logic. Totuşi, regulile pentru simbolismul intersecţiei posedă o trăsătură foarte importantă, care nu se poate găsi la regulile pentru înmulţirea numerică. Dacă *x* denotă o clasă, atunci intersecţia acestei clase cu ea însăşi este aceeaşi clasă, adică avem ca egalitate fundamentală:

$$xx = x.$$

în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic,* Boole exprimă adesea acest adevăr prin formula

$$x^n = x,$$

spunînd că aceasta este trăsătura distinctivă a calculului său. O vom întîlni şi sub altă formă.

în algebra numerică, împărţirea apare ca operaţie inversă înmulţirii; însă atunci cînd vorbeşte de clase, Boole, în general, nu permite o operaţie asemănătoare cu împărţirea. El subliniază că atunci cînd literele *x, y şi z* denotă clase, din egalitatea *xz = yz* nu putem avea egalitatea *x = y.* Clasa preoţilor bacalaureaţi poate eventual să fie coextensivă cu clasa preoţilor cu părul roşu, dar de aici nu urmează că toţi bacalaureaţii au părul roşu. Trebuie însă să amintim că şi în algebra numerică există limitări ale utilizării operaţiei de împărţire. Din egalitatea 2 x 0 = 3 X 0 nu putem avea egalitatea 2 = 3. Oricum, pînă la urmă s-ar putea găsi în teoria claselor ceva analog cu împărţirea, iar Boole însuşi a sugerat că acest analog ar putea fi abstracţia, pe care odinioară Leibniz o reprezenta prin scădere. Să presupunem că *x, y* şi *z* denotă clase legate între ele în modul indicat de egalitatea *x = yz.* Atunci, sugestia ar fi de a scrie *x/y = z* ca o expresie pentru faptul că *z* denotă o clasă pe care o obţinem atunci cînd luînd membrii clasei denumită *x* efectuăm o abstragere impunînd restricţia ca ei să fie incluşi în clasa numită *y.* De exemplu, am putea eventual spune că aşa cum clasa oamenilor este produsul logic al clasei fiinţelor raţionale şi al clasei animalelor, tot astfel în această notaţie nouă

clasa oamenilor ----— clasa animalelor, clasa fiinţelor raţionale

Dar este important să ţinem seama de două limitări ale

acestei convenţii. în primul rînd expresia *xjy* poate să fie lipsită de semnificaţie în calculul claselor atunci cînd clasa denotată prin *x* nu este în fapt o parte a clasei denotată cu *y.* Aceasta aduce cu observaţia că expresia *xjy* este lipsită de semnificaţie în algebra întregilor dacă numărul denotat prin *x* nu este un multiplu al numărului denotat cu *y.* în al doilea rînd, expresia *xfy* este în general nedeterminată în calculul claselor; în adevăr, pot exista multe clase diferite ale căror intersecţii cu clasa denotată prin *y* sînt toate coextensive cu clasa denotată prin *x.* în locul exemplului dat mai sus am fi putut scrie tot aşa de bine :

clasa oamenilor ----= clasa primatelor, clasa fiinţelor raţionale

deşi, fireşte, clasa primatelor nu este identică cu clasa animalelor. Aceasta este o limitare cu mult mai serioasă în ce priveşte utilizarea unei asemenea notaţii şi probabil că în virtutea ei spunea Boole că expresia *xfy* nu are interpretare în logică.

în algebra claselor, semnul compus *x y* poate fi utilizat pentru a reprezenta clasa lucrurilor care aparţin sau clasei denotate prin *x,* sau clasei denotate prin *y.* Dar cuvîntul „sau" are în limba uzuală două semnificaţii distincte : uneori e folosit în sens inclusiv, iar alteori în sens exclusiv. Majoritatea urmaşilor lui Boole în logica matematică au adoptat pe *x + y* ca semn al reuniunii claselor denumite *x* şf *y* (adică al sumei lor logice în sens inclusiv), astfel încît clasa denumită *x -f- y* conţine clasa denumită *xy.* Din punct de vedere formal, această convenţie prezintă un avantaj considerabil, deoarece ea ne permite să afirmăm egalitatea

$$X + x = x$$

şi să lucrăm astfel în calcul, în concordanţă cu principiul dualităţii pentru reuniune şi intersecţie. în particular, putem adopta cele două reguli ale lui De Morgan

$$xy = x + y$$

$$x \text{ -/- } y — xy$$

unde semnul *x* reprezintă complementara clasei denumită *x,* adică reprezintă clasa tuturor lucrurilor care nu aparţin clasei denumită *x.* Dar Boole însuşi consideră întotdeauna că atunci cînd literele *x* şi *y* reprezintă clase, nu putem scrie *x y* decît dacă cele două clase se exclud una pe cealaltă; pentru a stabili în mod clar că această condiţie este satisfăcută el

exprimă uneori suma logică sub forma *x + xy,* unde *x* are sensul explicat mai sus[§§§§§]. Efectul acestei restricţii este înlăturarea din sistemul său a egalităţii *x -/- x = x* şi, odată cu ea, a celor două reguli generale pe care le-am dat mai sus. Totuşi, nu ar fi corect dacă am spune că el adoptă sensul exclusiv pentru semnul +, dacă prin această afirmaţie se înţelege introducerea lui *x-ţ-y ca* semn pentru clasa tuturor lucrurilor care aparţin fie clasei denumită *x,* fie clasei denumită *y,* dar nu aparţin clasei denumită *xy.* Mai cu- rînd, el presupune că atunci cînd este corect să scriem *x + y,* trebuie să fie adevărată egalitatea *xy* = 0.

Motivul pentru care Boole a adoptat această restricţie în utilizarea semnului -f- era, probabil, dorinţa sa de a putea folosi ca invers semnul —. Avem aci o situaţie întrucîtva asemănătoare cu aceea înfăţişată anterior în legătură cu împărţirea. Atunci cînd *x, y* şi *z* denotă clase, este tentant să presupunem că din egalitatea *x = y* -j- *z* putem deriva altă egalitate: *x — y = z.* Dar în algebra claselor o asemenea uzanţă are două limitări. în primul rînd, nu putem ataşa vreo semnificaţie expresiei *x — y* atunci cînd clasa denotată prin *y* nu este o parte a clasei denotată prin *x.* Aceasta aminteşte observaţia că expresia *x — y* este lipsită de semnificaţie în calculul numerelor naturale dacă numărul denotat prin *y* este mai mare decît numărul denotat cu *x.* în al doilea rînd, expresia *x — y* va fi nedeterminată dacă semnul + se ia în sens inclusiv, fără ipoteza specială că semnele între care el figurează reprezintă clase care nu se intersectează. într-adevăr, ecuaţia *x = y + z* poate atunci să fie compatibilă cu ecuaţia *x = y + + ii),* deşi literele *z* şi *w* nu reprezintă clase coextensive. Oricare ar fi motivul, Boole adoptă convenţia că semnul + poate figura numai între clase care se exclud reciproc şi el foloseşte liber semnul — ca invers al semnului în particular, complementara clasei denotată cu *x* el o notează cu 1 — *x,* iar semnul *x* îl introduce doar ca o abreviere. Această uzanţă îi permite să exprime principiul special al sistemului său cu ajutorul formulei

$$x(1 - x) = 0.$$

Uneori el derivă această relaţie din egalitatea $x = x^2$, care este un caz particular al legii sale în ce priveşte puterea; dar alteori el preferă să considere această formulă ca

---

§§§§§ *• *Mathematical Analysis of Logic,* p. 52; *Laws of Thought,* pp. 33, 48, 55—56, 119.

fundamentală, remareînd că ea este o formulare a principiului necontradicţiei, pe care atît Aristotel cît şi Leibniz l-au considerat principiul fundamental.

Acest sistem de notaţie, aşa cum se prezintă el, este suficient pentru exprimarea propoziţiilor *A, E, I* şi *O* din logica tradiţională, cu condiţia ca propoziţiile A şi £ să fie luate fără presupoziţie existenţială******. Să presupunem că litera *x* reprezintă clasa lucrurilor X iar litera *y* clasa lucrurilor Y ; avem atunci următoarea schemă :

Orice X este Y . . . . *(1 — *y) = 0*
Nici un X nu este Y . *xy* = 0
Unii X sînt Y . . . . *xy* / 0
Unii X nu sînt Y . . . *x(l — y)* 0.

Fiecare din cele patru propoziţii se poate reprezenta în diferite alte feluri care sînt algebric echivalente cu cele de mai sus, dar nu sînt aşa de simple. Trebuie însă să observăm că în această schemă propoziţiile particulare se exprimă prin inegalităţi, pe cînd propoziţiile universale se exprimă prin egalităţi. Boole preferă să exprime toate tipurile tradiţionale de propoziţii categorice prin egalităţi, şi de aceea în locul ultimelor două rînduri din schema de mai sus el sciie :

Unii X sînt Y.....*xy = v*
Unii X nu sînt Y. . . . x(l — *y) = v.*

Litera *v,* pe care a introdus-o aici cu scopul de a exprima propoziţii particulare, pare să corespundă cu utilizarea cuvîntului „unii" în limba curentă; dar se spune că această literă reprezintă o clasă „nedefinită în toate privinţele în afară de una" şi anume aceea că ea conţine un membru sau mai mulţi membri (adică nu este coextensivă cu clasa nulă). Această explicaţie nu este prea satisfăcătoare. Dacă un lucru X este Y, atunci în adevăr clasa notată cu *xy* conţine cel puţin un membru. Dar noi nu putem afirma acest lucru egalînd clasa denumită *xy* cu o clasă a cărei unică caracteristică definitorie este aceea că ea conţine un membru sau mai mulţi membri, căci o asemenea clasă nu există.

în cadrul sistemului lui Boole, litera *v* se poate manipula în unele privinţe ca şi cum ar fi un simbol de clasă. Dar aceasta este mai curînd un defect decît un merit al notaţiei, întrucît

******" O atare interpretare a propoziţiilor universale a fost dată de către Franz Brentano In *Psychologie vom empirischen Standpunkt* (1874), II, cap. 7, iar consecinţele au fost dezvoltate în detaliu de către elevul său F. Hillebrand în *Die neuen Theorien der kate- gorischen Schliisse,* 1891.

sugerează inferenţe eronate. Am putea fi tentaţi, de exemplu, să presupunem că *ab = v* şi *cd = v* luate la un loc furnizează concluzia *ab = cd.* Boole însuşi nu face asemenea erori, dar aceasta se datorează faptului că el impune restricţii în ce priveşte utilizarea literei *v,* restricţii care nu sînt compatibile cu faptul că el consideră această literă ca un simbol de clasă. De exemplu, el spune că putem trece de la egalitatea *x* (1 — *y)* = 0, care înseamnă „Fiecare X este Y", la egalitatea *vx* (1 — *y)* = 0 şi că a doua poate fi interpretată ca însemnînd „Unii X sînt Y", dar numai în ipoteza că sînt adevărate egalităţile v(l — *x)* = 0 şi w(l — *y)* = 0, adică clasa denotată prin *v* este conţinută în calitate de subclasă în fiecare dintre cele două clase denotate prin *x* şi *y.* Deoarece *v* se presupune că denotă o clasă care are cel puţin un membru, condiţia sa de interpretare conduce în fapt la ipoteza că clasele denotate prin *x* şi *y* nu sînt nule. în mod evident, în toate acestea ţelul său este de a asigura inferenţele aristotelice care depind de presupoziţia existenţială, dar el a ales o cale nefericită. Dacă litera *v* reprezintă o clasă, chiar în sensul lărgit în care se poate spune că simbolurile 0 şi 1 reprezintă clase, atunci nu ar trebui să fie necesare reguli deosebite pentru interpretarea ei în diferitele contexte în care ea se utilizează. Este însă interesant de observat că într-o vreme Leibniz avusese o idee similară††††††.

Pentru interpretarea sistemului în termenii claselor şi ai operaţiilor cu clase este clar că următoarele formule, pe care Boole le presupune k— explicit sau implicit — ca premise, exprimă propoziţii adevărate :

1) *xy = yx*
2) *x + y = y + x*
3) $^{x}(y +^{z}) — {}^{x}y + xz$
4) *x(y — z) = xy — xz*
(5) dacă *x = y,* atunci *xz = yz*
(6) dacă *x = y,* atunci *x + z = y +z*
(7) dacă *x = y,* atunci *x — z = y—z*
(8) x(l - *x) =* 0.

Dintre acestea, primele şapte au aceeaşi formă ca regulile din algebra numerică obişnuită. Ceea ce distinge sistemul de algebra obişnuită este formula a opta. Dar Boole a subliniat că şi această formulă poate fi interpretată numeric dacă

†††††† Couturat, *La Logique de Leibniz,* pp. 345 — 350.

valorilor pe care le poate lua variabila x li se impune o restricţie convenabilă. Descoperirea sa el o formulează cu următoarele cuvinte :

„Să considerăm apoi o algebră în care simbolurile *x, y, z* etc. pot lua valorile 0 şi 1 şi numai aceste valori. Legile, axiomele şi procesele unei asemenea algebre vor fi în întregime identice cu legile, axiomele şi procesele algebrei logicii. Numai deosebirile de interpretare le despart. Lucrarea care urmează îşi bazează metoda pe acest principiu”[#####].

Acest fragment şi altele asemănătoare i-au determinat pe unii comentatori să prezinte sistemul lui Boole ca o algebră cu două valori. O asemenea prezentare este eronată, căci atunci cînd tratăm sistemul ca un calcul al claselor nu presupunem că fiecare clasă este coexten- sivă fie cu clasa universală, fie cu clasa nulă. în realitate, sistemul lui Boole poate trece într-o algebră cu două valori numai dacă adăugăm un principiu nou:

(9) sau $x = 1$, sau $x = 0$.

Calculul rezultat admite şi el o interpretare numerică (adică simbolurile 1 şi 0 pot fi luate în sensul lor numeric obişnuit) ; dar el nu mai admite o interpretare în termenii claselor. Boole nu face o distincţie netă între sistemul său iniţial şi sistemul mai restrîns care cuprinde (9). Aceasta se poate vedea din faptul că el dă alte două interpretări logice ale formulelor sale, fără să remarce că una din ele satisface (9) pe cînd cealaltă n-o satisface. Aceste interpretări prezintă în sine uni mare interes şi merită să fie menţionate aici.

în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic* şi apoi în *Laws oj Thought,* Boole propune o convenţie conform căreia egalitatea $x = 1$ să însemne că propoziţia X este adevărată, iar egalitatea $x = 0$ sa însemne că X este falsă. în concordanţă cu aceasta, valorile de adevă: ale propoziţiilor mai complicate pot fi reprezentate prin combinăr de litere mici, de exemplu valoarea de adevăr a conjuncţie^ propoziţii lor X şi Y. va fi reprezentată prin combinaţia *xy,* iar valoarea d adevăr a disjuncţiei exclusive a lui X şi Y prin combinaţia $x + y$ E lesne de văzut că avem aici tot ce este necesar pentru a interpret

---

Laws of Thought, pp. 37 — 38.

sistemul lui Boole în termenii valorilor de adevăr pentru propoziţii, simbolurile 1 şi 0 stînd respectiv pentru adevăr şi fals. Şi această interpretare, ca şi cea numerică, satisface principiul (9).

Interpretarea care foloseşte propoziţii este realizată de Boole în felul în care am prezentat-o, numai că el nu utilizează expresia „valoare de adevăr", care a fost inventată mai tîrziu de către Frege. Dar această interpretare este introdusă de fiecare dată prin observaţii care ne fac să ne aşteptăm la ceva diferit şi, poate, mai interesant, în *Mathematical Analysis of Logic,* Boole scrie :

,, Simbolurilor X, Y, Z, care reprezintă propoziţiile, le putem ataşa simbolurile elective *x, y, z* în felul următor: Universul ipotetic 1 va conţine toate cazurile şi complexele de circumstanţe care se pot concepe. Simbolul electiv *x,* atribuit unei expresii de asemenea cazuri, va selecta acele cazuri în care propoziţia X este adevărată ; la fel pentru Y şi Z. Dacă ne limităm la contemplarea unei propoziţii date X şi facem abstracţie de orice alte considerente, atunci putem concepe numai două cazuri: primul caz constă în aceea că propoziţia dată este adevărată, iar al doilea că ea este falsă. Deoarece împreună aceste două cazuri epuizează universul propoziţiei iar primul este determinat în simbolul electiv *x,* cel de-al doilea va fi determinat prin atribuirea simbolului 1 — *x.* Dacă însă admitem alte considerente, atunci fiecare din aceste cazuri se va desface în altele, individual mai puţin extensive, al căror număr va depinde de numărul criteriilor exterioare admise. De exemplu, dacă asociem propoziţiile X şi Y, numărul total de cazuri care se pot concepe este înfăţişat în schema următoare:

Cazu	Expresii elective
1) X adevărată, Y adevărată	x(l - *y}*
2) X adevărată, Y falsă	(i -
3) X falsă, Y adevărată	(1, - x)(l —
4) X falsă, Y falsă . . Şi	

trebuie să observăm că oricît de puţine sau de numeroase ar fi aceste circums- ante, suma totală a expresiilor care reprezintă cazurile ce se pot concepe va fi în- otdeauna egală cu unu."“

în *Laws of Thought,* Boole abandonează această idee atît de promiţă- oare şi în locul ei propune ca litera *x* să fie considerată ca reprezen- ind *durata de timp* în cursul căreia este adevărată propoziţia X. .ceasta este o revenire la o prezentare nesatisfăcătoare a adevărului ropusă de către unii logicieni din antichitate şi evul mediu; probabil i ea i-a fost sugerată de lecturile sale metafizice şi teologice cu privire adevărurile eterne. Dar pe cît se pare, în ambele sale cărţi el pregă- şte calea pentru o schemă în care simbolurile 1 şi 0 nu mai repre- ntă adevărul şi falsul, ci mai curînd necesarul şi imposibilul. Ca şi terpretarea prin clase, acest

model nu mai satisface principiul (9), şoarece el nu pretinde ca fiecare expresie să fie egalată fie cu 1, fie

” *Mathematical Analysis of Logic,* pp. 49 — 50.

La sfîrşitul cărţii *Mathematical Analysis of Logic,* Boole face afirmaţia destul de confuză că teoria propoziţiilor ipotetice ar putea fi tratată ca o parte a teoriei probabilităţilor iar în *Laws of Thought* mai multe capitole sînt destinate aplicării la probabilităţi a noii algebre. De fapt, aceasta furnizează încă o interpretare a calculului, conform căreia literele reprezintă probabilitatea propoziţiei X relativ la toată informaţia disponibilă, să zicem K. Adaptînd şi simplificînd simbolismul lui Boole obţinem:

$$\text{Prob}_K(X \text{ şi } Y) = xy$$

dacă, fiind dat K, X şi Y sînt independente, şi

Prob_K *(X sau* Y) = $x + y$, dacă X şi Y se exclud reciproc. Evident că această schemă nu satisface principiul (9); într-adevăr, nu putem admite ca fiecare probabilitate să fie egală cu 1 sau 0.

într-un pasaj din *Laws of Thought,* care a fost adesea citat, Boole afirmă că metoda sa se întemeiază pe identitatea calculului logicii cu algebra numerică a lui 0 şi 1. Mai departe, în aceeaşi carte, el subliniază:

„De fapt putem să lăsăm la o parte interpretarea logică a simbolurilor dintr-J egalitate dată; să le transformăm în simboluri cantitative susceptibile de a lua doaj valorile 0 şi 1 ; să operăm cu ele pînă obţinem rezultatul dorit; iar în final să revel nim la interpretarea logică"§§§§§§. I

Am văzut că algebra numerică a lui 0 şi 1 este un sistem mai restrînl decît algebra claselor, deoarece ea cuprinde principiul (9), care nl este valabil pentru clase. Dar desigur că ceea ce putem demonstrl în algebra lui 0 şi 1 fără a utiliza ca premisă principiul (9) va avea ul analog în algebra claselor; iar Boole nu utilizează de fapt nici princl piui (9), nici altceva care să-l implice atunci cînd operează cu simb® lurile calculului său. Dacă uneori îşi permite să conceapă aceste sinB boluri ca numere, aceasta este doar o concesie pe care o face uzanţeloB şi care-l face să se simtă acasă la el atunci cînd operează cu simboluB în realitate, esenţa

§§§§§§ *Laws of Thought,* p. 70. în original, propoziţia este în întregime scrisă cu carac' cursive.

metodei sale este derivarea consecinţelor într-« mod abstract, adică fără a ţine seama de interpretare. Acest lucru H îl spune lămurit în primul paragraf al cărţii *Mathematical Analy^ of Logic,* deşi ulterior, uneori, scrie ca şi cum ar fi uitat acest priB cipiu. B

în elaborarea formală a sistemului lui Boole, procesul fundamenlB este acela pe care el îl numeşte *dezvoltare.* Să presupunem că expre« *f(x)* este o abreviere pentru o expresie care cuprinde litera *x* şi eventual alte senine elective, iar în afară de ele numai semnele algebrice uzuale despre care am vorbit mai sus. Atunci, alegînd în mod convenabil coeficienţii *a* şi *b,* avem /(x) = *ax* + &(1 — x). Iar pentru a determina valorile lui *a* şi *b* n-avem decît să presupunem că *x* ia valorile 1 şi 0: prin substituţie obţinem atunci egalităţile /(l) = *a* şi /(O) = *b,* din care deducem:

/(x)=/(l)x+/(0)(l-x).

Se spune că această formulă dă *dezvoltarea* expresiei /(x) după x. în *Mathematical Analysis of Logic,* Boole tratează această dezvoltare ca un caz degenerat al teoremei lui Maclaurin asupra dezvoltării unei funcţii după puterile crescătoare ale variabilei, dar în *Laws of Thou- ght* el expediază această idee fantezistă la subsol[*******].

Să presupunem acum că expresia /(x, *y)* este abrevierea unei expresii în care în afară de simbolurile x şi *y* figurează doar semnele algebrice i uzuale. Considerînd-o la început ca semnul unei funcţii în care locul argumentului este ocupat de x, putem scrie:

/(*- j) =/(i. *y)x* +/(o, j)(i - x).

Considerînd rezultatul ca fiind semnul unei funcţii în care locul argumentului îl ocupă litera *y,* putem scrie atunci precum urmează:

f(x,y) =/(l, *l)xy* -4-/(1, 0)x(l - *y)* +

+ /(0, 1)(1 - *x)y* +/(0, 0)(l - x)(l — *y)*

?eea ce reprezintă dezvoltarea completă a lui /(x, *y).* Este uşor de văzut :um se pot dezvolta similar expresiile funcţionale cu un număr mai nare de simboluri elective. De exemplu, dacă avem de-a face cu o uncţie de trei argumente, dezvoltarea va conţine $2^3 = 8$ termeni, iecare avînd un coeficient egal cu 0 sau 1, aşezat pe lîngă una dintre ■xpresiile următoare:

*******Matkematical Analysis of Logic,* p. 60; *Laws of Thought,* p. 72.

xyz, xy(l — z), x(l — *y)z,* x(l — jy)(l — *z),* (1 — *x)yz,*
(1 - *)j(l - 2), (1 - x)(l - *y)z,* (1 - *)(1 - j)(l - *z).*

'ireşte că termenii ai căror coeficienţi sînt nuli se pot omite fără a ltera semnificaţia întregii expresii.

Deoarece fiecare ecuaţie electivă poate fi adusă la forma /(x, *y ...) =* = 0, este clar că ea poate fi exprimată şi ca egalitate cu zero a sumei nor termeni. Apoi, dintr-o asemenea egalitate se poate infera că ■ecare dintre termenii incluşi în sumă, luat separat, este egal cu 0, ■eoarece în acest calcul nu se admit termeni cu valori negative. Pe de altă parte, dacă avem două ecuaţii *f(x, y, . . .)* = 0 şi *g(x, y, . ..) ==* = 0, întregul lor conţinut poate fi redat printr-o singură ecuaţie *h(x, y, . . .)* = 0 a cărei dezvoltare cuprinde toţi termenii care figurează în dezvoltările celor două ecuaţii date. Se spune atunci că cele două ecuaţii au fost *reduse* la una.

Pe această bază putem să definim o altă operaţie importantă, şi anume *rezolvarea.* Să presupunem că informaţia dată este în întregime conţinută în ecuaţia *f(x)* = 0, unde expresia /(x) este o abreviere pentru o expresie în care figurează şi alte simboluri elective decît *x,* şi că dorim să găsim o ecuaţie de forma *x = f(y, z, .. .),* unde *y, z* etc. sînt toate celelalte simboluri care figurează în *f(x).* Dezvoltînd după *x* ecuaţia iniţială obţinem:

/(!)*+ /(«)(! -*) =0.

Aceasta se poate rescrie sub forma

[/(I) -/(0)>+/(0) =0,

şi de aici inferăm cu uşurinţă

$$\frac{/(O)}{/(O) - /(l)}$$

Trebuie să observăm că aici Boole introduce operaţia de împărţire căreia pînă acum nu-i atribuise nici o interpretare constantă în calculul său logic. Pentru a dispune de cele necesare în vederea rezolvării ecuaţiilor, el stabileşte aici anumite reguli de decodare care se întemeiază pe ipoteza că cel puţin aici simbolismului împărţirii i se poate atribui semnificaţia de abstragere. Problema nu este atît de dificilă cum pare la prima vedere. Atunci cînd o expresie de forma ——---se dez-

/(0) - /(l) voltă

după simbolurile elective pe care le cuprinde, rezultatul este o sumă de produse, iar semnul împărţirii apare doar în diferiţii coeficienţi care pot să aibă una din următoarele patru forme : Ţ' ~ ' y' ţ . Dintre acestea, prima şi a treia sînt uşor de înţeles deoarect se pot reduce la 1, respectiv 0, nu numai în algebra numerică uzuală dar şi într-un sistem în care semnul împărţirii indică abstragerea Nici a patra nu ne prea încurcă, deoarece se poate arăta că ea nu intervi ne decît pe lîngă un produs care, luat ca atare, este egal cu 0. Dar ; doua este curioasă; Boole spune că ea constituie un simbol de can titate perfect nedeterminat corespunzînd la „toţi, unii sau nici unul" Uneori el o egalează cu simbolul *v,* pe care îl utilizează în exprimare propoziţiilor particulare, dar acesta este un procedeu nesatisfăcătoi

deoarece litera *v* se presupune că reprezintă o clasă care nu este nulă. Am putea eventual să utilizăm în locul ei ca abreviere litera *w.* Atunci, dacă aplicînd regulile de rezolvare ajungem la un rezultat de forma

$$x \quad \frac{1}{1} p + \frac{0}{0} q + \frac{0}{1} r + \frac{1}{0}$$

unde *p*, *q*, *r* şi s sînt diferite expresii de produse care urmează să fie incluse în expresia finală, putem scrie:

$$x — p + wq.$$

în interpretarea prin clase, aceasta înseamnă că acea clasă care este notată cu *x* constă din clasa notată cu *p* şi o parte nedeterminată din clasa notată cu *q* (adică din clasa *q* se iau toţi membrii, unii sau nici unii). în una din însemnările ulterioare pe care n-a mai publicat-o, Boole spunea că cei patru coeficienţi posibili de mai sus ar putea fi luaţi ca reprezentînd respectiv cele patru categorii de universalitate, nedeterminare, non-existenţă şi imposibilitate, care, după părerea sa, ar trebui să înlocuiască cu folos categoriile lui Kant††††††.

în sfîrşit, Boole stabileşte reguli pentru *eliminare.* Să presupunem că informaţia noastră este reprezentată sub formă abreviată prin ecuaţia /(%) = 0 şi că este de dorit să stabilim relaţiile care există în mod independent de clasa denotată prin *x* între celelalte clase ale căror simboluri apar în dezvoltarea expresiei /(x). Prin procesul de rezolvare obţinem: iar de aici obţinem cu uşurinţă

$$x = \frac{f(0)}{/(O) -}$$

/(O) - /(i)

Dar, conform cu una dintre regulile fundamentale ale calculului, avem

$$*(1 — x) = 0$$

?i ţinînd seama de ea şi de cele două rezultate de mai sus ale rezolvării, putem, spune Boole, infera:

[/(O) -/(!)]*

dică Dacă prelucrarea părţii din stingă a acestei ecuaţii dă

†††††††• *Studies in Logic and Probability,* pp. 220—226.

doar 0 = 0, înseamnă că ecuaţia iniţială nu oferă relaţii independente de clasa denotată prin *x.* Dacă însă rezultatul este de forma *g(y, z, ...)* = 0, am stabilit că dezvoltarea completă a ecuaţiei *f(x)* = 0 dă o relaţie sau relaţii independente de clasa denotată prin *x.*

Această argumentare pe care Boole o dă în capitolul cu privire la eliminare din *Laws of Thought* este derutantă întrucît foloseşte expresii care nu au interpretare logică. Dar acelaşi rezultat poate fi obţinut printr-un raţionament intuitiv mai satisfăcător. Deoarece dezvoltarea expresiei funcţionale /(%) după *x* dă /(1)% + /(0)(l — x), unde /(l)x este o prescurtare pentru suma termenilor care au ca factor pe *x,* iar /(O) (1 — *x)* este o prescurtare pentru suma termenilor care au ca factor (1 — *x),* /(l) şi /(O) trebuie să reprezinte sume de termeni care se exprimă fără ajutorul simbolului *x* iar /(l)/(0) trebuie să fie o abreviere a părţilor comune, adică a sumei termenilor care apar în ambele totaluri. Dacă în fapt expresiile desfăşurate pentru /(l) şi /(O) nu au părţi comune, atunci este evident că egalitatea *fix}* = 0 nu indică vreo relaţie independentă de clasa denotată prin *x.* Dacă însă reprezentările desfăşurate pentru /(l) şi /(O) au o parte comună, egalarea acestei părţi cu 0 trebuie să indice o relaţie independentă de clasa denotată prin *x.*

Folosind diferite combinări ale acestor procese de calcul, Boole ajunge la reprezentări algebrice pentru toate felurile de raţionament admise în logica tradiţională. în particular, raţionamentul silogistic poate fi prezentat ca o reducere a două ecuaţii de clasă la una singură, urmată de eliminarea termenului mediu şi rezolvarea în raport cu termenul subiect al concluziei. Să considerăm, de exemplu, că *h* reprezintă clasa fiinţelor umane, *a* clasa animalelor, iar *m* clasa muritorilor ; atunci premisele „Orice om este un animal" şi „Orice animal este muritor" pot fi înlocuite prin egalităţile:

$$A(1 - a) = 0,$$
$$a(1 — m) = 0.$$

Reducînd acestea la una singură, obţinem: *h — ha + a -— am* = 0 şi dezvoltînd aceasta în raport cu *a* obţinem

$$(h — h| 4- 1 — lm\}a 4- (h — hO 4- 0 — 0m)(l — a) = 0$$

adică, după reduceri:

$$(1 — m\}a 4- h(l — a) = 0.$$

Apoi, eliminînd *a* în concordanţă cu regulile eliminării,

putem conchide

$$(1 — m\}h = 0.$$

Această ecuaţie este deja într-o asemenea formă încît ea poate fi interpretată ca însemnînd „Orice fiinţă umană este muritoare”, dar pentru a ne deprinde cu metodele lui Boole putem continua conform cu regulile sale pentru rezolvare:

$$h = \frac{(1 - m)0}{(1 - >n)0 - (1 - >n)l}$$

$$\frac{(1 - 1)0 , (1 - 0)0 .}{(i - 1)0 - (1 - 1)1 \qquad (1 - 0)0 - (1 - 0)1}$$

$$= m + 0(1 — m) = wm + 0(1 — m).$$

Exprimat în cuvinte, rezultatul nostru înseamnă că clasa fiinţelor umane constă dintr-o selecţie nedeterminată (care eventual poate să fie nulă) din clasa muritorilor şi o selecţie nulă din clasa nemuritorilor ; pentru a exclude posibilitatea unei selecţii nule din clasa muritorilor ar trebui să includem în cadrul premiselor noastre afirmarea explicită a presupoziţiei existenţiale pentru termenul „om”. Evident că rezultatul putea fi obţinut prin mijloace mai simple, dar este interesant de văzut cum pot fi aplicate în mod mecanic metodele introduse de Boole. De fapt el ne-a dat ceea ce astăzi se numeşte în mod curent o procedură de decizie (un algoritm).

4. *Dezvoltări ulterioare ale algebrei booleene*

în sistemul lui Boole, noutatea principală este teoria sa a funcţiilor dective şi a dezvoltărilor lor, sau, cum ne-am exprima noi astăzi, teoria funcţiilor de adevăr şi exprimarea lor în forma normală disjunctivă. Filon din Megara a discutat anumite funcţii elective şi a explicat :um pot fi ele dezvoltate, însă Boole are meritul de a fi fost primul rare a tratat aceste chestiuni într-un mod general. Am citat un pasaj fin *Mathematical Analysis of Logic,* de unde mai era puţin pînă la zabelele de adevăr utilizate de Frege (adică tabularea diferitelor josibilităţi de adevăr) în *Begriffsschrift* (1879), care înfăţişează mai impede procedeul dezvoltării al lui Boole‡‡‡‡‡‡. într-un memoriu din 885, logicianul american

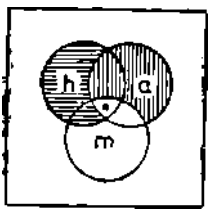
‡‡‡‡‡‡” în *Elementary Lessons in Logic* din 1870 şi în lucrări ulterioare, W. S. Jevons a dat ibulări ale combinaţiilor permise de termeni generali şi

C.S. Peirce adăuga observaţia că o formulă lecesar adevărată este o formulă care rămîne adevărată indepen- ent de valorile de adevăr atribuite constituenţilor săi: „Pentru a sta

a arătat cum pot fi utilizate 'est^a în calculul logic.

bili dacă o formulă este necesar adevărată, substituiţi pentru literele ei î şi v şi vedeţi dacă se poate considera falsă pentru vreo atribuire de asemenea valori”[28]. Cu aceste două noţiuni avem în esenţă tot ce este necesar pentru metoda tabulară sau matricială în logica primară, metodă care a fost popularizată în 1920 de către Post şi Wittgenstein.

în lucrarea sa *Symbolic Logic* din 1881, J. Venn, un alt admirator al lui Boole, a folosit diagrame pentru regiuni ce se intersectează (adică modele topologice) în vederea ilustrării relaţiilor dintre clase, respectiv a condiţiilor de adevăr pentru propoziţii. Diagramele sale diferă de cele ale lui Euler prin aceea că el reprezintă în prmul rînd toate combinaţiile posibile prin domenii distincte şi apoi indică prin marcare care dintre diferitele domenii combinate trebuie să fie nule şi care ne-nule, pentru ca o anumită propoziţie să fie valabilă. Ca şi Jevons, el consideră că ceea ce încearcă să elucideze reprezintă una dintre descoperirile principale ale lui Boole; de fapt, diagramele sale trebuie considerate ca ilustrări ale teoriei dezvoltării cu ajutorul căreia Boole şi-a justificat diferitele procese de calcul. De pildă, exemplul considerat la sfîrşitul secţiunii anterioare poate fi prezentat fără aparatul greoi al coeficienţilor numerici ai lui Boole, cu ajutorul figurii de mai jos, în care pătratul reprezintă universul discursului, iar domeniile celor trei cercuri reprezintă cele trei clase de fiinţe: umane, animale şi muritori. Haşurarea unui domeniu arată că, după cum stipulează o premisă, clasa corespunzătoare este vidă, de exemplu clasa fiinţelor umane care nu sînt animale, iar marcarea cu asterisc a unui domeniu arată că clasa corespunzătoare nu este vidă. în *Symbolic Logic* (1896), Lewis Carroll a utilizat o schemă întrucîtva similară în cadrul procedurii pe care a dat-o pentru determinarea validităţii silogismelor.



Deoarece metodele lui Boole pot fi reduse la reguli de triere, ele se pretează la mecanizare. Primul care a înţeles acest lucru a fost Jevons; în 1869, el a reuşit să construiască o maşină logică pe care în anul următor a prezentat-o la Royal Society[§§§§§§§]. în descrierea pe care o dădea, el spunea

---

§§§§§§§ *Collected Papers,* III, § 387. în cele ce urinează se va cita sub iniţialele *C.P.*

[99] *The Substitution of Similare,* 1869; „On The Mechanical Performance of Logica' Inference", *Philosophical Transactions of the Royal Society,* CLX

că maşina seamănă foarte mult cu o pianină, dar pentru ochiul modern ea pare mai degrabă să semene cu un contor, deoarece semnele care indică diferitele combinaţii posibile de elemente (fie ele clase sau propoziţii) apar şi dispar prin apăsarea clapelor. în 1885, Allan Marquand a propus un analog electric al maşinii lui Jevons, iar în 1947 un calculator electric de alt tip a fost construit la Harvard de către T. A. Kalin şi W. Burkhart, special pentru rezolvarea problemelor booleene, care conţin pînă la douăsprezece variabile logice (adică litere propoziţionale sau de clase)******** ††††††††.

Orice calculator electronic modern de destinaţie generală poate opera cu algebra booleeană. în adevăr, dacă el poate urmări articulaţia logică a calculului matematic uzual, el trebuie să fie în stare să ţină seama de conjuncţii, disjuncţii, negaţii şi dependenţa condiţională. De exemplu, instrucţiunile ar putea fi că dacă atît condiţia *A* cît şi condiţia *B* sînt realizate în cursul executării cutărui proces, atunci trebuie efectuată *C,* şi apoi, după cum rezultatul lui *C* este *D* sau *E,* trebuie să se treacă la *F,* respectiv la *G,* şi aşa mai departe. Toate acestea se realizează folosind lămpi termionice sau tranzistori în diferite combinaţii cu legături în serie sau în paralel în calitate de comutatoare ale rutelor impulsurilor electrice; şi nu este de mirare că se pot realiza circuite convenabile, deoarece algebra booleeană a fost utilizată încă în 1936 pentru studiul circuitelor cu contacte şi relee în tehnica comunicaţiilor electromecanice[81]. Dacă închiderea unui comutator care trebuie să fie într-una din cele două stări posibile se aseamănă cu afirmarea unei propoziţii, atunci deschiderea poate fi asemănată cu negaţia acestei propoziţii, iar aranjarea i două comutatoare în serie poate fi asemănată cu conjuncţia a două propoziţii, în timp ce legătura lor în paralel se aseamănă cu conectarea a două propoziţii prin „sau". Dacă în concordanţă cu aceste inalogii

(1870), pp. 497—518. O relatare cu privire la această maşină, însoţită de o figură, este dată în *The Principia of Science,* publicată de Jevons în 1874. Maşina se păstrează la Muzeul de istorie a ştiinţe de la Oxford. W. Mays şi D. P. Henry au publicat o relatare asupra operei lui Jevon; în *Mind,* LXII (1953), p. 484 — 505, intitulată *Jevons and Logic.*

******** B. V. Bowden, *Faster Than Thought* (Mai iute ca gîndul), p. 333 şi urm. Această crare despre calculatoarele electronice dă unele detalii cu privire la alte maşini logice, ir o prezentare completă a subiectului se poate găsi în pasionanta carte a lui Martin ardner *Logic Machines and Diagrame,* care începe de la Raymond Lullus.

†††††††† C. E. Shannon, „A Symbolic of Relay and Switching Circuits", *Transactions of American Institute of Electrical Engineers* LVII (1938), p. 713 — 723.

un circuit complex de comutatoare şi relee s-a descris printr-o ■xpresie booleeană convenabilă, putem să determinăm algebric dacă mumite porţiuni vor fi deschise în anumite condiţii, iar prin transfor- nări algebrice ale expresiei se poate chiar găsi un circuit care să pro- Lucă acelaşi rezultat printr-un aparataj mai simplu.

Deşi sistemul lui Boole se pretează în numeroase feluri la o manipulare însnicioasă, trebuie să admitem că el este deficitar nu numai sub rapor- ul eleganţei, din cauza restricţiei de a nu putea scrie *x y* dacă u este satisfăcută condiţia *xy* = 0, dar şi sub raportul rigorii, datorită tilizării literei *v* pentru exprimarea propoziţiilor existenţiale, a admiteiii unor coeficienţi numerici diferiţi de 1 şi 0 şi a utilizării operaţiei de împărţire, căreia nu i se atribuie în logică o semnificaţie constantă, în cursul jumătăţii de veac de după publicarea operei lui Boole *Laws of Thought,* toate aceste carenţe au fost înlăturate de succesorii săi. Reforma a început-o, în 1864, Jevons cu *Pure Logic, or the Logic of Quality apart frorn Quantity,* în care propunea utilizarea simbolului + în accepţia lui „sau" în sens inclusiv, fără vreo restricţie în ce priveşte semnele între care poate figura. Această propunere a permis o simplificare radicală şi, ca atare, a fost bine primită de către toţi autorii ulteriori din domeniul algebrei logicii, cu excepţia lui Venn. După cum sublinia C. S. Peirce într-un memoriu din 1867, se obţine astfel un paralelism exact între teoremele referitoare la adunarea logică şi cele referitoare la înmulţirea logică[32]. Acest avantaj a fost exploatat în modul cel mai deplin de către E. Schroder, care în *Vor- lesungen iiber die Algebra der Logik* (1890—1905) a pus aceste teoreme în coloane paralele. într-un memoriu ulterior (1880), Peirce a înaintat şi mai mult pe calea simplificării, arătînd că funcţiile elective ale lui Boole se pot exprima cu ajutorul unui singur semn primitiv avînd semnificaţia „nici... nici..."[33]. Dar, ca şi multe alte descoperiri ale lui Peirce, aceasta a trecut neobservată la timpul său; reducerea n-a fost utilizată în nici un fel pînă n-a fost redescoperită de H. M. Sheffer în 1913[34]. Tot lui Peirce îi revine meritul de a fi reintrodus un semn avînd semnificaţia *inest* al lui Leibniz ; ideea, deşi nu şi semnul, a fost adoptată de către Schroder.

însă dezvoltarea cea mai importantă constă în prezentarea calculului într-o formă riguros axiomatizată. în timp ce Boole se mulţumise să-şi caracterizeze sistemul prin unicul

principiu care părea să-l deosebească de algebra numerică obişnuită, urmaşii săi au încercat să expliciteze toate ipotezele. Rezultatul acestor cercetări poate fi urmărit cel mai bine în cele două memorii ale lui E. V. Huntington cu privire la „Mulţimi de postulate independente pentru algebra logicii”[35]. Deşi Huntington vorbeşte de algebra logicii, el prezintă postulatele sale într-o formă abstractă, adică fără vreo referire k interpretări, şi este interesant de observat că versiunea dată de e pentru algebra booleeană prezintă un interes considerabil în mate matica modernă, abstracţie făcînd de utilizarea ei în logică. Pentri uşurarea comparării, prima, a doua şi a patra dintre listele de principi ale lui Huntington sînt date în cele ce urmează în simbolismul lu ‡‡‡‡‡‡‡ §§§§§§§§ Boole, în măsura în care acest lucru este posibil. Trebuie încă o dată 6ă amintim că diferitele semne, inclusiv 1 şi 0, nu au alt sens în afară de cel care le este atribuit de către postulate.

Prima mulţime de postulate a lui Huntington este adaptată după *Universal Algebra* (1898) a lui A. N. Whitehead; ea este cea mai apropiată de sistemul lui Boole, deoarece ia ca primitive cele două operaţii de adunare şi înmulţire. Se presupune că aceste operaţii se pot aplica oricărei perechi dintr-o clasă de lucruri care pot fi denumite pe scurt elemente ale algebrei. Dacă vrem să dăm o interpretare logică acestor postulate, vom considera că elementele sînt fie clase, fie propoziţii.

I. a. Dacă *a* şi *b* sînt elemente, atunci şi *a* -/- *b* este element.

I. b. Dacă *a* şi *b* sînt elemente, atunci şi *a* X *b* este element.

Il.a. Există un element 0 astfel încît pentru orice element *a, a* + 0 = *a.*

Il.b. Există un element 1 astfel încît pentru orice element *a, a* X 1 = *a.*

Ill.a. *a + b = b* + ® pentru toate elementele *a* şi *b* ale căror com- h > ■ binaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.

III. b. *a* X *b = b* X *a* pentru toate elementele *a* şi *b* ale

---

‡‡‡‡‡‡‡[31] *C.P.,* **III,** §§ l-19

” *C.P.,* IV, §§ 12-20

§§§§§§§§ *Trans. Amer. Math. Soc.,* XIV (1913), p. 481—488

“ *Ibid.,* V (1904), p. 288-309 şi XXXV (1933), pp. 274-304, 557-558, 971.

căror » ► combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.

IV. a. $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ pentru toate elementele *a,* & şi c ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.

IV. b. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ pentru toate elementele *a, b* şi *c* ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.

V. Dacă elementele 0 şi 1 există şi sînt unice, atunci există un element $\breve{a}$ astfel încît (I) $a + \hat{a} = 1$ şi (II) $a \times \hat{a} = 0$.

VI. Există cel puţin două elemente *x* şi *y* astfel încît *x / y.*

Trebuie notat că aceste postulate sînt coordonate astfel încît să pună în evidenţă corespondenţa în sistem dintre adunare şi înmulţire. Independenţa fiecărui postulat de toate celelalte se poate arăta construind un model care satisface toate celelalte fără a satisface postulatul considerat. Unele condiţii, care la prima vedere par a fi redundante, sînt incluse special în vederea păstrării independenţei. De exemplu. Ha sau Ilb pot fi false dacă V este satisfăcut doar prin neîndeplinirea condiţiei.

A doua mulţime a lui Huntington este similară cu cele propuse le Leibniz, Peirce şi Schroder întrucît ea se ocupă cu o relaţie de ncluziune, care se deosebeşte de orice operaţii cu elemente. Semnul)e care-l vom utiliza pentru această relaţie este folosit în matematica numerelor în sens de „este mai mic decît", dar aici trebuie înţeles în sensul că formula $a < b$ nu exclude formula $a = b.$ Dacă, după cum este uzul, elementele algebrei sînt presupuse a fi clase, atunci se poate considera că semnul stă pentru incluziune în sensul în care o subclasă este inclusă într-o supraclasă, dar *nu este* membru al acesteia.

1. $a < a$ pentru orice element a.
2. Dacă $a < b$ şi $b < a,$ atunci $a = b.$
3. Dacă $a < b$ şi $b <$ c, atunci $a < c.$
4. Există un element 0 astfel încît pentru orice element *a* diferit de el $0 < a.$
5. Există un element 1 astfel încît pentru orice element *a* diferit de el, $a < 1$.
6. Dacă *a b* şi nici $a < b$ nici $b < a,$ atunci există un element s astfel încît (I) $a <$ s, (II) $b <$ s şi (III) dacă *y* diferit de

s este astfel încît $a < y$ şi $& < jy$, atunci $s < y$.

7. Dacă a b şi nici $a < b$ nici $b < a$, atunci există un element p astfel încît (I) $p < a$, (II) $p < b$ şi (III) dacă x diferit de P este astfel încît $x < a$ şi $x <. b$, atunci $x < p$.
8. Dacă elementele 0 şi 1 există şi sînt unice, atunci pentru orice element a există un element $ă$ astfel încît (I) dacă $x < a$ şi $x < ă$ atunci $x = 0$ şi (II) dacă $a < y$ şi $â < y$ atunci $y = 1$.
9. Dacă postulatele (1), (4), (5), (8) sînt toate valabile şi dacă nu are loc $a < b$, atunci există un element x diferit de 0 astfel încît $x < a$ şi $x < b$.
10. Există cel puţin două elemente x şi y astfel încît x / y.

In acest ansamblu de postulate, subansamblul (1) — (7) este alcătuit din postulate independente, (8) şi (9) sînt independente de primele şapte, dar atît (6) cît şi (7) se pot deduce din celelalte. Le-am menţionat aici pe amîndouă de dragul simetriei. Evident, literele s şi p, utilizări în enunţurile respective, au scopul de a sugera „suma", respectiv „produsul".

Postulatele (4) şi (8) pentru incluziune explicitează un prin' cipiu din teoria claselor, care adesea a dat naştere la confuzii, ş anume : clasa nulă este o subclasă a tuturor claselor. La prima veden pare curios a spune că o clasă nu are membri, dar odată acceptat: această extindere tehnică a utilizării cuvîntului „clasă", principiu menţionat este firesc şi uşor de înţeles. într-adevăr, faptul că inter secţia a două clase oarecare este o subclasă a fiecăreia dintre ele consti tuie un truism, iar de aici rezultă în mod direct că subclasa desemnat prin *axă*, adică clasa nulă, trebuie să fie o subclasă a clasei desemnat prin a, oricare ar fi aceea.

A patra mulţime a lui Huntington este construită pentru a arăta cum se poate formula întregul sistem pornind de la operaţiile de adunare şi luare a complementarei ca unice noţiuni nedefinite. Alte noţiuni, cum ar fi operaţia de înmulţire sau relaţia de incluziune, se pot introduce la nevoie prin definiţii.

(I) Dacă a şi b sînt elemente, atunci $a + b$ este de asemenea element.
(II) Dacă a este un element, atunci $ă$ este de asemenea element.

(III) *a + b = b + a* pentru toate elementele *a* şi *b* ale căror combinaţii menţionate aici sînt de asemenea elemente.

(IV) (a + &)+ c = « + (& + c) pentru toate elementele *a, b* şi *c* ale căror combinaţii menţionate aici sînt de asemenea elemente.

(V) *â-|-E-|-â-]-b = a* pentru toate elementele *a* şi *b* ale căror combinaţii menţionate aici sînt de asemenea elemente.

Acest ansamblu precum şi ansamblul corespunzător pentru operaţiile de înmulţire şi luare a complementarei sînt probabil cele mai simple dintre cele ce se pot construi cu două sau mai multe operaţii.

Prin procedeul lui Peirce şi Sheffer amintit mai sus se poate oferi însă o mulţime mai simplă de postulate, întrucît ea cuprinde o singură operaţie primitivă.

1. Există cel puţin două elemente distincte.
2. *ajb* este element, oricare ar fi elementele *a* şi *b.*
3. (a/«)/(«/«) = *a* pentru orice element *a* ale cărui combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
4. *a/{bl(b/b)} = a/a* pentru toate elementele *a şi b* ale căror combinaţii menţionate aici sînt şi ele elemente.
5. {«/(6/c)}/{(«/(6/c)} = {(6/fi)/«}/{(c/c)/«) pentru toate elementele *a, b* şi *c* ale căror combinaţii menţionate aci sînt şi ele elemente.

Această mulţime se poate găsi în memoriul lui Sheffer de care am vorbit mai sus, iar expresia «/fi e numită adesea funcţia bară a lui Sheffer. Sîntem de acord că ultimele trei postulate par foarte complicate atunci cînd sînt scrise ca aici, în întregime, dar ele capătă o înfăţişare mai naturală atunci cînd expresia a/fi se consideră ca semnificînd fie *â* x fi, fie *ă* + fi, unde semnul *ă* se introduce ca abreviere pentru «/«. Faptul că bara se poate interpreta la fel de bine în două moduri diferite este o consecinţă interesantă a principiului dualităţii.

Mai recent, A. Tarski a dat diferite mulţimi echivalente de postulate pentru un sistem extins de algebră booleeană cu două operaţii cu caracter nefinitist, şi anume : luarea sumei logice, adică a reuniunii, pentru toate elementele unei mulţimi specificate de elemente şi luarea produsului logic, adică a intersecţiei, pentru toate elementele unei mulţimi

specificate de elemente[********]. Această generalizare este strîns legată de o teorie a relaţiei dintre parte şi întreg care a fost dezvoltată de către S. Lesniewski sub numele de „mereologie”[††††††††]. De fapt, singura deosebire constă în aceea că sistemul lui Leăniewski exclude posibilitatea unui element nul inclus în orice alt element.

Toate aceste mulţimi de axiome au ca trăsătură comună faptul că utilizează cuvinte din limba uzuală, cum ar fi „dacă”, şi deci presupun un sistem de logică ce cuprinde reguli de inferenţă de la o propoziţie sau o mulţime de propoziţii la altă propoziţie sau mulţime de propoziţii. Acest fapt nu este un motiv suficient pentru a contesta că algebra lui Boole poate fi ea însăşi interpretată ca sistem de logică, dar el sugerează că ea nu poate fi partea cea mai simplă sau partea fundamentală a logicii. Dacă se presupune că elementele algebrei sînt clase, atunci, evident, trebuie să existe o teorie fundamentală cu privire la derivarea propoziţiilor din alte propoziţii. Dar această teorie de bază nu poate fi aceeaşi algebră booleeană, cu interpretarea că elementele sînt de astă dată propoziţii, deoarece a doua versiune a algebrei cuprinde exact aceleaşi ipoteze ca şi algebra claselor. Lucrarea lui Frege din 1879, *Begriffsschrift,* a fost primul tratat de logică în care ştiinţa a fost dezvoltată într-o manieră absolut sistematică, cu un calcul al propoziţiilor asemănător celui al lui Hrisip urmat, după cum se cuvine, de un calcul al claselor. Dar încă în 1877, H. McColl a făcut propuneri pentru un calcul al propoziţiilor în care principiile asertate să fie mai curînd implicaţii decît egalităţi, şi în această privinţă trebuie să-i acordăm meritul priorităţii, deşi sistemul pe care l-a propus nu era complet, aşa cum a fost calculul propoziţiilor al lui Frege[‡‡‡‡‡‡‡‡].

5. *Teoria relaţiilor: De Morgan şi Peirce*

Succesul lui Boole în construirea unei algebre care cuprindea toate teoremele logicii tradiţionale i-a determinat pe unii logicieni să presupună că toată logica poate fi

[*********] „Zur Grundlegung der Booleschen Algebra”, *Fundamenta Mathematicae,* XXIV (1935), pp. 177 — 198. A se vedea şi traducerea în engleză, în *Logic, Semantice, Metama- thematics,* pp. 320—341.

[†††††††††][7] „O podstawach matematyki”, *Przeglad Filozoficzny,* XXXIII (1930), pp. 77—105.

[‡‡‡‡‡‡‡‡‡] „The Calculus of Equivalent Statements”, *Proceedings of the London Mathematical Society,* IX (1878), pp. 9-10; 177-186; X (1879) pp. 16-28; XI (1880), pp. 113-121.

prezentată într-o formă algebrică; de aceea, în generaţia următoare s-au făcut încercări de a prelucra logica relaţiilor în acelaşi mod ca şi logica claselor. Cea mai detaliată dezvoltare pe această linie de gîndire se poate găsi la Schroder în *Vorlesungen uber die Algebra der Logik* (volumul III, 1895), dar ideea originală şi majoritatea propoziţiilor interesante au fost formulate pentru prima oară de către Peirce într-un şir de memorii scrise între 1870 şi 1903 şi care acum se pot citi în volumul al treilea din operele sale (Collected Papers). Din nefericire, Peirce semăna cu Leibniz nu numai în ce priveşte originalitatea logicii sale, dar şi în ce priveşte inaptitudinea organică de a finisa numeroasele proiecte concepute.

în capitolele anterioare am menţionat un număr de tentative sporadice de a lucra cu argumentări care depind de proprietăţile relaţiilor, dar interesul susţinut pentru această materie datează abia de la un memoriu din 1859, scris de către Augustus de Morgan[89]. în acest memoriu el spune că doctrina silogismului pe care o discutase în lucrarea sa *Formal Logic* din 1847 şi în memorii anterioare este doar un caz particular al teoriei compunerii relaţiilor şi că acum el doreşte să treacă la o abordare mai generală a acestei materii. Canoanele raţionamentului silogistic au ca efect un enunţ asupra caracterului convertibil şi tranzitiv al relaţiei de identitate. O relaţie se spune că este convertibilă atunci cînd ea este identică cu propria ei conversă (de exemplu, relaţia de asemănare); se spune că este tranzitivă atunci cînd o relativă a unei relative în raport cu această relaţie este o relativă de aceeaşi speţă (de exemplu, relaţia de a fi un strămoş). Aici cuvîntul „convertibil" exprimă ceea ce în scrierile mai vechi se înţelegea prin „simetric". Distincţia nu era nouă; în adevăr, după cum a sublimat Peirce, Ockham a scris despre asemenea relaţii că ele ar fi echiparente în'opoziţie cu relaţiile disparente, cum ar fi relaţia de tată§§§§§§§§§. Prin cuvîntul „relativă" pe care-l utilizează în definiţia relaţiilor tranzitive. De Morgan înţelege ceea ce unii logicieni numesc termen relativ, adică un termen care se aplică la ceva numai dacă acesta este legat de un anume altceva. El, ca şi Peirce şi Schroder, concepe totdeauna o

§§§§§§§§§•• „On the Syllogism IV aud ou the Logic of Relations", *Cambridge Philosophical Transactions,* X (1864), pp. 331—358.

[10] *Summa Totius Logicae,* I, cap. 52, citat de Peirce în *C.P.,* III, § 136. Termenul *equiparantia* intervine încă la Petrus Hispanus în *Summulae Logicales* (ed. Bochenski, 3. 19).

relaţie ca fiind exprimată într-o formă ca „ — este un strămoş al lui..şi consideră că sarcina este de a arăta cum se pot combina termenii relativi între ei precum şi cu termeni nerelativi.

în cuprinsul memoriului său. De Morgan propune simbolul pentru conversa şi contradictoria (el spune „contrara") unei relative şi pentru cele trei moduri diferite în care se pot combina două relative. După ce arată că conversa contradictoriei şi contradictoria conversei sînt identice, el trece apoi la tabularea conversei, contradictoriei şi a conversei contradictoriei pentru fiecare din cele trei combinaţii. Notaţia sa nu este prea satisfăcătoare şi nu avem nevoie s-o reproducem aici. Cele trei moduri de combinaţie pe care le analizează el sînt cele care se pot exprima prin scheme ca (I) *x* este un *l* al unui *m* al lui *y* (de ex., „John este un preferat al stăpînului lui Peter"), (II) *x* este un *l* al fiecărui *m* al lui *y,* (III) *x* este un *l* al unui singur *m* al lui *y.* Şi el arată că conversa, sau contradictoria, sau conversa contradictoriei pentru fiecare asemenea combinaţie este la rîndul ei o combinaţie de una din speţele considerate, dar o combinaţie în care o relativă simplă poate fi conversa, sau contradictoria, sau conversa contradictoriei unei relative simple din combinaţia iniţială. Astfel, conversa contradictoriei combinaţiei „preferat al stăpînului lui" este „non-servitor al fiecărui preferat al lui" sau „servitor numai al unui nepreferat al lui".

în primul său memoriu cu privire la logica relativelor, publicat în 1870, Peirce spune despre lucrarea lui De Morgan:

„Acest sistem lasă încă de dorit. Algebra logică a lui Boole are o frumuseţe atît de singulară încît este interesant să cercetăm dacă ea nu poate fi extinsă pe întregul imperiu al logicii formale în loc de a fi restrînsă la partea cea mai simplă şi mai puţin utilă a materiei, logica termenilor, absoluţi, care pe vremea lui Boole era unica logică formală cunoscută ... Extinzînd utilizarea simbolurilor vechi la materii noi, trebuie desigur să ne ghidăm după anumite principii de analogie care, atunci cînd sînt formulate, devin definiţii noi şi mai largi pentru aceste simboluri"**********.

Poate că ideea unei algebre a relativelor a fost sugerată de convenţia lui De Morgan de a scrie *Im* ca o abreviere pentru *l al unui m al lui;* într-adevăr, Peirce a continuat să folosească juxtapunerea semnelor relative în acest fel şi spunea că această juxtapunere este o expresie a produsului relativ. în cele ce urmează, vom utiliza simbolul $ly;_R m$ în loc

********** *C.P.,* III, §§ 45-46.

de *Im* pentru a face clară noutatea concepţiei, precum şi pentru a pune în gardă împotriva ipotezei că înmulţirea relativă ar fi comutativă, sau că din *„x* este un preferat al unui stăpîn al lui *y"* an putea infera *,,x* este un stăpîn al unui preferat al lui *y".* Urmînc aceeaşi analogie, Peirce a introdus mai tîrziu noţiunea de sumă reia tivă. Deoarece semnul său special pentru suma relativă este greu de reprodus o vom exprima prin simbolul *l* -|-$_R$*m.* în utilizarea obişnuită sau în convenţiile logicienilor anteriori nu exista nimic care să sugereze o interpretare pentru un atare semn; alegerea lui Peirce pare a fi fost călăuzită de dorinţa de a păstra tiparul regulilor lui De Morgan pentru sumele şi produsele logice nerelative. în adevăr, el spunea că suma relativă a lui „preferat" şi „stăpîn" este „preferat al fiecărui non-stăpîn al lui". Aceasta este o combinaţie care cu greu ar putea fi considerată ca un candidat convenabil pentru titlul de sumă, dar ea are meritul de a ne permite să asertăm două egalităţi:

$$/ \text{XjjW\^{I}} == l \text{ X } {}_{R}W^{*}$$

Şi

$$l \; x_R m = l$$

Desigur că trebuie să deosebim cu grijă produsele relative şi sumele relative definite astfel de Peirce de produsele şi sumele logice obişnuite ale relativelor. Semnul *l* X *m* poate fi considerat ca însemnînd „preferat şi stăpîn", unde ambele relaţii considerate au aceiaşi termeni; dar semnul *l* X $_R$*m* înseamnă „preferat al unui stăpîn al lui", unde relaţiile se combină numai în sensul că un al doilea termen pentru prima este un prim termen pentru a doua. în mod inevitabil, această distincţie conduce la complicaţii în acest calcul. De exemplu, avem nu numai

$$\text{X }_{R}(b \text{ X }_{R} c\} \qquad \text{X }_{R} b) \text{ X }_{R} c,$$

dar şi

$$a \text{ X }_{R}(b \text{ X }_{R} c) < (\text{a X }_{R} b) \text{ X (a X }_{R} c)$$

unde < are sensul de „este inclus în" şi se presupune că termenii între care intervine reprezintă clase.

Este acest rezultat o extindere naturală a algebrei booleene ? în afară de cele trei operaţii, adunare, înmulţire şi negaţie (sau luare a complementarei), care intervin în algebra booleeană obişnuită, acest sistem nou conţine

operaţiile de adunare relativă, înmulţire relativă şi conversiune; şi deşi există anumite analogii între aceste trei operaţii noi şi cele trei operaţii vechi, oricine studiază în amănunt opera lui Schroder este îndreptăţit să se întrebe dacă această tentativă de a prezenta teoria relaţiilor ca o algebră merită bătaia de cap pe care o provoacă. Este adevărat că, după cum spunea Schroder, noţiunea de produs relativ este importantă în studiul şirurilor, de exemplu în lucrarea lui Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlenl* (1888). într-adevăr, într-un şir, fiecare obiect anterior este legat de fiecare obiect următor printr-o relaţie tranzitivă, adică printr-o relaţie ale cărei puteri sînt toate identice cu ea însăşi, deoarece ea satisface condiţia $tX_Ri = t.$ Dar partea din teoria relaţiilor care poate fi prezentată în acest fel este doar un fragment redus din întreaga teorie şi chiar pentru acest fragment stilul prezentării pare neadecvat. Atunci cînd propunerile sale anterioare au fost realizate în detaliu de către Schroder, Peirce însuşi a apreciat astfel lucrurile.

într-un memoriu din 1883, publicat ca apendice la *Johns Hopkins Studies in Logic,* el a început să folosească indici inferiori pentru semnele sale relaţionale spre a arăta care anume termeni se presupune că intră în fiecare relaţie şi în ce ordine anume††††††††. De exemplu, semnul compus *lij* trebuia să însemne că persoana denumită *i* preferă o persoană denumită *j.* Această notaţie prezintă mari avantaje. Dacă, de exemplu, vrem să vorbim despre un om care se preferă pe sine, putem să scriem pur şi simplu *la,* unde apariţia aceleiaşi litere în cele două locuri pentru indici arată că avem de-a face cu o utilizare reflexivă sau, după cum spunea Peirce,' autorelativă a semnului relaţional. Iar atunci cînd vrem să vorbim, aşa cum a făcut Peirce uneori, despre relaţii cu mai mult decît doi termeni, putem construi expresii ca a_{ijk} sau Dar cea mai importantă utilizare a acestor indici este aceea în care ei se combină cu semnele S şi II, pe care Peirce le introduce în acelaşi articol. Aceşti cuantori, după cum îi numeşte el, sînt operatori cu semnificaţia „unii", respectiv „fiecare", şi ei vizează, desigur, adunarea logică şi înmulţirea logică a oricăror obiecte dintr-un anumit domeniu, deşi, după cum a explicat el mai tîrziu, ei nu pot reprezenta adunarea şi înmulţirea într-un sens riguros atunci cînd universul indivizilor este nenumărabil‡‡‡‡‡‡‡‡. Cu acest

---

††††††††††« *C.P.,* III, §§ 328-358.
‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡« *Ibid.,* § 393.

procedeu se pot da definiţii foarte clare şi simple pentru noţiunile de produs relativ şi sumă relativă, şi anume:

(Z X X *Wlxj)*

si

(l +

Deocamdată acesta a fost probabil serviciul principal pe care îl aştepte Peirce de la noul său sistem de notaţii, dar peste doi ani el s-a ocupai mai amplu de această notaţie§§§§§§§§§§ şi în cursul timpului a putut să-ş: dea seama că acest sistem de notaţii se poate folosi pentru a aborda tot felul de probleme care nu se pot exprima în limbajul înmulţiri: relative şi al adunării relative. în 1897, el scrie despre algebra sa a relativelor diadice:

„După cum mi se pare, profesorul SchrOder atribuie o valoare prea mare acestei algebre. Ceea ce în ochii săi pare să fie meritul cel mai mare, pentru mine cu greu ar fi un merit; adică faptul că ea ne permite să exprimăm sub forma unei ecuaţii ?ropoziţii a căror semnificaţie reală este cu mult mai simplă decît aceea a unei ecuaţii, n afară de algebra pe care am descris-o aici, am inventat alta, care mi se pare mult mai meritorie... în această algebră, fiecare propoziţie constă din două părţi: cuan- torii şi boolianul. Boolianul constă dintr-un număr de unităţi relative asociate prin multiplicare nerelativă şi agregare. Nu se pretinde nici un operator relativ (deşi, la nevoie, se pot introduce asemenea operatori). Fiecare relativă elementară este reprezentată printr-o literă în rindul respectiv cu indici subiacenţi care denotă indivizii şi care completează locurile goale. O bară trasată deasupra unei asemenea relative o neagă. La stingă boolianului se scriu cuantorii. Aceştia sînt II sau L cu indici inferiori care arată că în boolian fiecare obiect din univers trebuie substituit succesiv pentru indicele produsului nerelativ (dacă cuantorul este II) sau al agregatului (dacă cuantorul este S). De exemplu:

îî« $^{=}$ (^11 + ^ia + ^13 + ^{e}*-^{c}-) ‘ + ^22 + ^23 + et^{c}-) • ^{e}t^{c}-

înseamnă că fiecare preferă ceva. însă

Sy Hj/$_{(}$-y= Z_{lx} ■* /31 ’ ^{etc}- 4- ^12 * ^22 ' ^32’ etc. — etc.

înseamnă că cineva este preferat de oricine”**********’.

în memoriul său din 1883 şi în studiul mai detaliat din 1885, Peirce spune că meritul acestui nou instrument îi revine lui O. H. Mitchell. în realitate, acest elev al său a folosit semne relaţionale cu indici şi operatori II şi S în contribuţia sa la *Johns Hopkins Studies in Logic,* dar nu împreună şi nici în sensul în care le utilizează Peirce. Ceea ce a creat Peirce a fost un simbolism adecvat pentru întreaga logică, avînd şi o sintaxă identică cu aceea a

§§§§§§§§§§« *Ibid.,* §§ 359-403.

**********“ *Ibid.,* §§ 498-502.

« *Ibid.,* § 499.

sistemelor care se utilizează în prezent. Invenţia sa el a numit-o algebra generală a logicii[49], dar ea nu este o algebră în sensul lui Boole, iar uzanţa actuală a rezervat titlul de „algebră a logicii" pentru acea parte a teoriei logicii care poate fi prezentată fără utilizarea cuantorilor. Aceasta include logica primară şi un fragment din logica neprimară, care este izomorf cu logica primară, şi anume teoria atributelor (sau a claselor). Cînd avem de-a face cu propoziţii care se pot exprima în simbolismul final al lui Peirce prin formule de felul 11^ < &,), putem înlătura indicii şi cuantorii fără pericol de confuzie, dar pentru iteoria generală a relaţiilor un asemenea instrument este adesea esenţial, iar faptul că Peirce a înţeles acest lucru dovedeşte măreţia sa ca logician. De asemenea este merituos faptul că el a formulat unele principii foarte importante în ce priveşte utilizarea cuantorilor în deducţie. De exemplu, el ştia că fiecare propoziţie se poate exprima într-o astfel de formă încît toţi cuantorii să fie la început; el a arătat că, pe măsura posibilului, cuantorii existenţiali trebuie să fie aduşi la stînga celor universali, anticipînd astfel într-un mod remarcabil avantajele a ceea ce în prezent se numeşte formă normală prenex Skolem††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡. Este adevărat că nu-i putem acorda lui Peirce meritul de a fi primul care a conceput o teorie comprehensivă a logicii generale : această onoare îi revine lui Frege, care a publicat *Begriffsschrift* în 1879. Dar, după cîte ştim, Peirce nu auzise deloc de Frege atunci cînd şi-a publicat memoriul *The Logic of Relatives* (1883), astfel încît realizările sale merită să fie reţinute.

Deoarece la punctul său de vedere mai comprehensiv asupra logicii Peirce a ajuns prin studiul teoriei relaţiilor, el atribuia o importanţă deosebită noţiunii de relaţie în scrierile sale de mai tîrziu şi uneori încerca să extindă terminologia teoriei sale într-o formă oarecum paradoxală. Nemulţumit de a vorbi de relative *poliadice,* adică expresii relative care în sistemul său de notaţie pretind mai mult decît doi indici, el a ajuns să spună că o expresie atributivă de forma ,,... este înţelept", ar putea fi numită relativă *monadică,* iar expresiile propoziţionale complete fără locuri goale — relative *medadice™.* în anumite privinţe, acest fel de a vorbi poate oferi avantajul simplificării teoretice, şi pentru acest motiv a

---

†††††††††† *C.P.,* III, § 505.

[49] *Ibid.,* § 465.

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Ibid.,* § 467.

şi fost adoptat de fapt de către unii logicieni de mai tîrziu, dar nu se poate spune că ar avea vreo valoare filosofică. Pe de altă parte, se poate cîştiga un plus de înţelegere din observaţiile lui Peirce cu privire la cele două feluri diferite de a lega sistemul său de notaţie a relativelor cu modul mai vechi de a vorbi despre subiecte şi predicate:

,,în enunţul unei relaţii, desemnările corelatelor trebuie să fie considerate ca tot atîtea *subiecte logice,* iar relativa însăşi ca fiind *predicatul.* întreaga mulţime a subiectelor logice poate fi de asemenea considerată ca *subiect colectiv,* pentru care enunţul relaţiei este *predicat''**.*

Un alt capitol interesant, dezvoltat de Peirce în cadrul teoriei sale a relaţiilor, este ceea ce el a denumit logica intenţională secundă, adică teoria unor noţiuni ca identitatea şi inerenţa. El o introduce în felul următor:

,,Să considerăm acum logica termenilor luaţi în sens colectiv. Notaţiile noastre, aşa cum au fost dezvoltate pînă aci, nu ne spun în ce caz doi indici, *i* şi *j,* denotă unul şi acelaşi lucru. Putem adopta un semn special de intenţie secundă, să zicem 1, pentru a exprima identitatea, scriind 1;/. Dar această relaţie de identitate are proprietăţi specifice. Prima dintre ele este aceea că dacă *i* şi *j* sînt identici, tot ce este adevărat cu privire la *i este* adevărat şi cu privire la *j.* Aceasta se poate scrie astfel:

ÎI» Hf {l«f + *• + *»}•

Utilizarea indicelui general al unui semn (aci: *x)* arată că formula este iconică. A doua proprietate este aceea că dacă orice este adevărat cu privire la *i* este adevărat şi cu privire la *j,* atunci *i* şi *j* sînt identici. Cel mai firesc mod de a scrie aceasta este următorul : fie că semnul *q* semnifică relaţia dintre o calitate, caracteristică, fapt sau predicat şi subiectul respectiv. Atunci proprietatea pe care vrem s-o exprimăm este

(h; + ?»')•

iar identitatea se defineşte astfel:

hr = nA(?A»?w + + ?«)•

Aceasta revine la a spune că două lucruri sînt identice atunci cînd fiecare predicat sau este adevărat pentru amîndouă, sau este fals pentru amîndouă. Ar putea să pară greoaie introducerea ideii de calitate pentru a exprima identitatea; dar această impresie se schimbă îndată ce ne dăm seama că *qktlki* înseamnă doar că *i* şi *j* sînt amîndouă in interiorul clasei (sau colecţiei) *k.* Dacă vrem, ne putem dispensa de semnul *q,* utilizind indicele unui semn şi referindu-ne la el în cuantori exact cum se referă indicii inferiori. Cu alte cuvinte, putem scrie:

1,7 = n,(x,xy 4- Xjiy).”eo

Aici, cuvîntul „semn” („token”) nu are semnificaţia specială de „apariţie particulară” pe care el i-a dat-o mai tîrziu, ci înseamnă orice simbol general de felul celor pe care adesea el îi numeşte relativi; „indice” înseamnă orice semn cu unica sarcină de a ne dirija atenţia către ceva, iar „iconic” este orice semn care figurează o schemă[61]. Astfel, cînd

Peirce spune că o anumită formulă este iconică deoarece conţine indicele general al unui „token”, el vrea să arate că această formulă dă tiparul pentru numeroase formule posibile şi deci, cum am spune noi acum, este o formulă schematică. Litera *q,* pe care el o utilizează aici cu semnificaţia de relaţie dintre caracteristică şi subiect sau dintre clasă şi un membru al ei, este evident un semn constant de mare importanţă. El introduce acest semn pentru a putea generaliza pe tot domeniul predicatelor posibile ale lui *i* şi *j,* fără a se abate de la convenţiile potrivit cărora cuantorii se referă numai la indicii inferiori; dar apoi el merge pînă la a spune că, dacă iorim, putem abandona această convenţie, permiţînd unui cuantor >ă se refere la indicele unui „token”, ceea ce în terminologia modernă ;ste tot una cu a spune că putem folosi cuantori pentru a lega variabile iredicative. în capitolele următoare vom avea prilejul de a examina nai amănunţit implicaţiile celor două moduri ale lui Peirce de generali- are pentru calităţi sau clase. Deocamdată trebuie să observăm doar ă Peirce a dovedit o putere de pătrundere remarcabilă atunci cînd a espăiţit noul său obiect de studiu de restul logicii, numindu-l inten- Lonal-secund. Aceasta constituie începutul a ceea ce în prezent se urneşte teoria mulţimilor. §§§§§§§§§§ **********

VII

NUMERE, MULŢIMI ŞI ŞIRURI

1. *Frege şi contemporanii săi*

După lucrările lui Boole, următorul mare pas în logică l-a realizat Gottlob Frege (1848—1925). Dar în timp ce Boole urmărea să prezinte logica drept parte a matematicii, Frege dorea să arate că aritmetica este tot una cu logica. La prima vedere, cele două programe par să rie opuse, iar filosofii care nu i-au simpatizat pe nici unul din ei au subliniat uneori în derîdere discrepanţa aparentă. Dar în realitate nu este nici o contradicţie. Cînd Boole scria despre analiza matematică a logicii, el avea în vedere numai prezentarea

§§§§§§§§§§ C.P., III, § 398. A se vedea şi *C.P.,* IV, §§ 80-84.
********** *C.P.,* III, §§ 361 şi urm.

logicii ca un calcul similar în anumite privinţe cu algebra numerelor. Ca şi Leibniz, el considera că trăsătura distinctivă a ştiinţei matematice ar fi construcţia de calcule şi că ar putea prezenta interes calcule care să fie interpretabile fără referinţă la număr sau cantitate. Frege nu urmărea să nege aceasta. Dimpotrivă, el a mers mult mai departe decît oricare dintre precursorii săi în ce priveşte exigenţa de rigoare formală în studiul logicii, iar sistemul deductiv sau calculul pe care l-a elaborat este cea mai uriaşă realizare din istoria acestui domeniu. Dar în plus el a încercat să arate că şi numerele se pot defini fără referire la alte noţiuni decît acelea cuprinse în interpretarea calculului său ca sistem de logică. Dacă avea dreptate să facă aceasta, atunci logica include aritmetica şi, odată cu ea, toate ramurile matematicii care se pot reduce la aritmetică, în sensul că se poate arăta că ele cuprind doar noţiuni care se află deja în aritmetică sau logică, cel puţin ca posibilitate.

Sugestia după care aritmetica este o dezvoltare a logicii, după cîte ştim în prezent, aparţine şi altor autori dinainte de Frege††††††††††. Dar nici unul nu a arătat vreodată în amănunt cum se poate dezvolta logica într-un sistem care ar putea primi şi numele de aritmetică, iar Frege a înţeles de la bun început că teza sa nu poate fi (stabilită în moc satisfăcător fără a efectua în prealabil două îmbunătăţiri în ce priveşte prezentarea logicii. în primul rînd, materialul tradiţional precum ş:

contribuţiile mai noi ale lui Leibniz şi Boole trebuie să fie organizate astfel încît să înfăţişeze în mod clar structura ştiinţei şi marea varietate a formelor~pr opoziţionale pe care trebuie să le ia în considerare logica generală. în al doilea rînd, orice lucru care se pretinde pentru demonstraţia teoremelor trebuie să fie exprimat explicit de la bun început, iar procedura de deducţie trebuie să fie redusă la un număr restrîns de mutări standard, astfel încît să nu apară vreun pericol de greşeală inconştientă în ceea ce avem de demonstrat‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ §§§§§§§§§§. Tocmai pentru a veni în

---

†††††††††††† *Die Grundlagen der Aiithmetik,* §§ 15—17. Lucrarea va fi citată sub iniţialele *Gl* ea a fost tradusă în engleză de J. L. Austin sub titlul *The Foundations of Arithmetic*

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Gl„* §§ 90-91.

§§§§§§§§§§§ *Grundgesetze der Arithmetik,* I, p. XII. Această lucrare va fi citată în cele ce urmează *Gg.*

întîmpinarea acestor două pretenţii de sistem şi rigoare a scris Frege, în 1879, lucrarea sa *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* După cum arată şi numele, această lucrare este un manual de ideografie sau scriere conceptuală. în prefaţa sa, Frege spune că relaţia dintre scriere şi vorbirea uzuală este asemănătoare cu relaţia dintre microscop şi ochi şi pretinde pentru ea meritele care au fost prezise de Leibniz şi alţii în secolul al XVII-lea în ce priveşte aşa-zisul *calculus philosophi- cus et ratiocinator.* Este una din sarcinile filosof iei, ne spune el, de a distruge dominaţia cuvîntului asupra gîndirii umane, iar invenţia sa ar oferi deja ceva în direcţia eliberării logicii de supunerea ei prea mare faţă de gramatica limbajului uzual. în particular, trebuie să ne aşteptăm ca în logică terminologia ambiguă şi confuză de „subiect" şi „predicat" să facă loc unei distincţii mai satisfăcătoare a formelor Ipropoziţionale în conformitate cu doctrina funcţiilor. Adăugind cîteva semne noi pentru relaţiile care se pot intui, noua scriere s-ar putea extinde în vederea realizării unui calcul geometric de felul celui pe care-l doresc matematicienii atunci cînd vorbesc de *analysis situs*; dar intenţia sa este de a arăta în prezent că aşa cum e, această scriere este adecvată pentru prezentarea aritmeticii, şi o treime din mica sa carte trebuie să fie considerată ca o comunicare preliminară i acestui program.

Din păcate, lucrarea epocală a lui Frege a fost trecută cu vederea le către matematicienii şi filosofii timpului. După cum a observat ;1 mai tîrziu, nu era nici o speranţă de înţelegere din partea multor natematicieni care, îndată ce se loveau de expresii logice cum ar fi .concept", „relaţie", „judecată", spuneau *Metaphysica sunt, non zguntur,* şi nici din partea filosofilor, care atunci cînd vedeau o formulă puneau *Mathematica sunt, non leguntur*[2]. De aceea, în 1884 el a mblicat cartea *Die Grundlagen der Arithmetik* în care a dat o expunere eformală a vederilor sale, împreună cu o critică a ideilor curente în ce priveşte natura aritmeticii. El pretindea că ar fi făcut doar plauzibilă teza sa[**********] [††††††††††] şi, deşi era foarte descurajat de faptul că lucrarea sa anterioară a fost neglijată, spera încă să dea o demonstraţie riguroasă a identităţii aritmeticii cu logica. Spre sfîrşitul

---

[**********] *Gl„* § 87.

[††††††††††] *Berichte der Jenaischen Gesellschafl fiir Mcdtzinische und Nalurwissenschaftlich: Forschung,* 1891.

deceniului el a revenit la această problemă, iar în 1893 a apărut primul volum din capodopera sa, *Die Grundgesetze der Arithnietik.* în timp ce lucra la aceasta el şi-a modificat în anumite privinţe ideile anterioare privind filosofia logicii şi şi-a publicat unele rezultate în trei articole importante *Uber Funktion und Begriff* (1891)‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡, *Uber Begriff und Gegenstand* (1892)[6], *Uber Sinn und Bedeutung* (1892)§§§§§§§§§§§§. în măsura în care sînt relevante, toate aceste lucruri noi sînt încorporate în marea sa lucrare, dar pentru o înţelegere mai deplină a gîndirii sale este totuşi necesar să ne referim la publicaţiile iniţiale. Din nou, modul în care au fost primite lucrările lui Frege era descurajant, aşa că el nu a mai publicat al doilea volum al lucrării *Grundgesetze* decît în 1903. Acesta din urmă se referă îndeosebi la teoria numerelor reale, dar o mare parte a sa este ocupată de critica vederilor curente, iar la sfîrşit Frege admite că trebuie să se mai facă mult înainte de a se putea defini numerele reale în mod convenabil. într-un *Nachwort* (apendice) scris după ce lucrarea fusese deja tipărită, el admite cu părere de rău prăbuşirea construcţiei sale în urma descoperirii de către Bertrand Russell a contradicţiei care este implicită în premisele sale; totuşi, el susţine în continuare concepţia sa generală în ce priveşte relaţia dintre aritmetică şi logică şi examinează metode care ar putea repara greşeala făcută.

în ultimii 22 de ani ai vieţii sale, Frege a continuat să lucreze în domeniul filosofiei logicii şi matematicii, dar a publicat puţin, probabil fiindcă nu găsea o soluţie satisfăcătoare a problemelor sale. Unele articole cu privire la fundamentele geometriei, pe care le-a publicat în 1906, arată o lipsă de simpatie şi poate chiar o lipsă de înţelegere pentru dezvoltarea metodei axiomatice de către Hilbert**********. Pe de altă parte, unele comentarii pe care le-a făcut asupra lucrării lui Russell în 1910® şi unele memorii pe care le-a publicat în ultimi: ani pe probleme

---

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡*Vierteljahrschrift fur wissenschaftliche Philosophic,* XVI (1892), p. 192 — 205.

§§§§§§§§§§§§ *Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritili,* C (1892), pag. 25- 50, (Tradus, şi în limba română, în culegerea *Logică fi Filosofic* — Editura politică, 1966).

• „Uber die Grundlagen der Geometrie", *J ahresbericht des Deulschen Matheniatike Vereins,* XV (1906), pp. 293-309, 377-403, 423-430.

**********P.E.B. Jourdain, „The Development of the Theories of Matliematical Logic au the Principles of Mathematics", *The Quarterly Journal of Pure aud Applied Mathematic;* XLIII (1912), pp. 237-269.

epistemologice arată că gîndirea sa rămăsese vie şi critică. De aceea este păcat că executorii săi literari nu au dat încă la iveală materialul nepublicat pe care îl au în păstrare††††††††††††.

în capitolul următor vom examina acele descoperiri logice ale lui Frege care sînt respectate de către oponenţii săi filosofi sau matematicieni. Dar, înainte de a intra în detalii, este util să notăm aici linia generală a programului său, aşa cum a expus-o el însuşi în cea mai populară dintre lucrările sale, *Die Grundlagen der Arithmetik,* şi să comparăm punctul său de vedere cu opiniile eminenţilor săi contemporani J. W. R. Dedekind (1831-1916), G. Cantor (1845-1918) şi G. Peano (1858—1932). Dedekind, care era cel mai bătrîn şi primul care devenise cunoscut, publicase lucrarea sa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* încă în 1872, dar Cantor a fost singurul dintre aceştia care a dezvoltat o teorie „logică" a aritmeticii înainte de Frege, astfel încît trebuie să începem cu el.

2. *Teoria mulţimilor a lui Cantor*

Introducerea teoriei numerelor reale este un pas crucial nu numai pentru că implică luarea în considerare a mulţimilor infinite de numere raţionale, după cum am remarcat într-un capitol anterior, dar şi pentru că ea pare să pretindă recunoaşterea unui nou tip de infinit. în timp ce numerele raţionale se pot aşeza într-o corespondenţă biunivocă cu numerele naturale astfel încît se spune că ele formează o mulţime infinită numărabilă, chiar şi submulţimea numerelor reale conţinută într-un interval ca cel de la 0 la 1 este uu exemplu de infinit de ordin superior. Aceasta s-a arătat pentru prima oară de către Cantor prin renumitul său procedeu al diagonalei. Pentru simplificare, să considerăm numerele reale dintre 0 şi 1 ca zecimale infinite, luînd, de exemplu, i ca 0,24999..., y ca 0,49999... etc. şi să presupunem că avem o prescripţie după care le putem aranja pe toate într-o tabelă infinită de forma :

0,iZ^^l2^3 ...

---

†††††††††††††† în deceniul care a trecut de la scrierea acestor rînduri, situaţia s-a schimbat, lanuscrisele lui h'rege, inclusiv o bună parte din corespondenţa sa, au fost editate <ota trad.k

0,6^3 • • • 0,(^3 • • • astfel încît putem vorbi de primul dintre ele, de-al doilea, al treilea şi aşa mai departe. Atunci putem să indicăm un număr real situat în interiorul intervalului de la 0 la 1, aşezînd în primul loc după virgulă orice cifră dorim în afară de a_{lt} 0 sau 9, în al doilea loc orice cifră dorim în afară de b_2, 0 sau 9, în al treilea loc orice cifră dorim în afară de Cj, 0 sau 9 şi aşa mai departe. Dar acest număr real nu poate fi identic cu nici imul din tabela noastră, deoarece el diferă de fiecare dintre ele cu cel puţin una dintre zecimale. Aceasta revine la a spune că tabela nu conţine toate numerele reale din intervalul considerat, sau, cu alte cuvinte, totalitatea numerelor reale din interval nu este numărabilă.

Pentru a face faţă acestei situaţii, între anii 1874 —1897 Cantor a elaborat o nouă disciplină matematică, denumită teoria mulţimilor. Opera sa a fost admirată cu pasiune de către mulţi matematicieni şi condamnată cu egală pasiune de către alţii. Deoarece, după cum vom vedea, dezbaterile în jurul dezvoltării acestei teorii sînt strîns legate de unele probleme importante în legătură cu logica, este necesar să examinăm aici cîteva din ideile principale pe care el le-a pus în circulaţie.

După însăşi definiţia lui Cantor, o mulţime *(Menge)* este „reunirea într-un întreg a unor obiecte definite, distincte ale percepţiei sau gîndirii noastre, obiecte care se numesc elementele mulţimii”‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡. în primele sale lucrări el a folosit uneori în locul acestui termen termenul de „varietate” *(Mannigfaltigkeit)* iar succesorii săi au întrebuinţat cuvintele *ensemble,* „totalitate”, „grămadă” şi „clasă”. Se spune că o mulţime îşi conţine elementele (sau membrii săi), şi că la rîndul lor acestea aparţin mulţimii. Fiind dată o mulţime S, o submulţime a lui S este aceea ale cărei elemente sînt toate elemente ale lui S ; şi, spre deosebire de elemente, spunem că submulţimea este o parte a lui S. O mulţime poate fi indicată fie dînd lista elementelor sale, de exemplu mulţimea {Peter, Paul}, fie dînd o descriere generală convenabilă pentru toate elementele sale şi pentru nimic altceva; dar în

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ Beitrăge zur Begriindung der transfiniten Mengenlehre, I, *Mathematische Annaler* XLVI (1895), pp. 481 — 512; a se vedea şi *Gesammelte Abhandlungen,* ed. Zermelo, j 282.

orice caz, mulţimile care au aceleaşi elemente trebuie să fie considerate ca fiind identice, deoarece, conform definiţiei, o mulţime nu este decît o colecţie de elemente. Pînă aici, teoria mulţimilor a lui Cantor seamănă cu teoria claselor a lui Boole, dar de aici încolo înceţ complicaţiile.

Două mulţimi S şi T se zice că sînt echivalente dacă există o corespondenţă biunivocă între ele, adică există o anumită relaţie astfe încît fiecare element al lui S este corelat prin această relaţie cu un element al lui T şi numai cu unul, şi fiecare element al lui T este corelat cu un element al lui S şi numai cu unul. De exemplu, într-o societate monogamă mulţimea soţilor este echivalentă, în acest sens tehnic, cu mulţimea soţiilor.

Puterea *(Măchtigkeit)* sau numărul cardinal al unei mulţimi se poate atunci introduce ca fiind ceea ce au în comun toate mulţimile echivalente şi numai ele. După Cantor, acesta este „conceptul general care cu ajutorul inteligenţei noastre active rezultă dintr-o mulţime atunci cînd facem abstracţie de natura diferitelor ei elemente precum şi de ordinea în care ele sînt date”, şi el poate fi reprezentat prin semnul „S”, în care cele două liniuţe orizontale indică dubla abstracţie. Dacă S este finită, atunci S este un număr natural; dar teoria intenţionează să cuprindă şi mulţimile infinite, ale căror puteri desigur că nu sînt numere naturale, şi această extindere se poate realiza cel mai uşor printr-o nouă definiţie a infinitului. Vom spune acum că o mulţime este infinită dacă şi numai dacă ea poate fi pusă într-o corespondenţă biunivocă cu o submulţime proprie a ei (adică cu o submulţime care nu este identică cu mulţimea însăşi). De exemplu, mulţimea numerelor întregi pozitive 1, 2, 3 etc. se poate pune în corespondenţă biunivocă cu mulţimea pătratelor de întregi pozitivi 1, 4, 9 etc., deşi pătratele sînt numai unele dintre numerele întregi pozitive. Această definiţie a fost formulată explicit pentru prima oară de către prietenul lui Cantor, Dedekind, în 1888[u]; dar în 1885 C. S. Peirce definise o mulţime finită ca fiind una care nu poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu o submulţime proprie a ei[§§§§§§§§§§§§§] [**********] [††††††††††††††], iar anticipări interesante ale acestei idei se pot găsi la

---

§§§§§§§§§§§§§ *Was sind und was sollen die Zahlen ?,* § 5, 64.
********** *Collected Papers,* III, § 402.
††††††††††††††[12] *De Communibus Notitiis,* § 38 *(= Moralia* 1079A).

Plutarh‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡, Produs§§§§§§§§§§§§§§§, Adam Balsham (care a fost menţionat înainte), Galilei********** ††††††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ şi Bernard Bolzano[18].

Aşa cum mulţimile finite se pot compara între ele după numărul lor cardinal, tot astfel şi submulţimile infinite. Orice mulţime S are un număr cardinal mai mic decît o mulţime T, dacă S este echivalent cu anumită submulţime a lui T, dar nu chiar cu T. De exemplu, N, mulţimea numerelor naturale, are un cardinal transfinit mai mic decît C, mulţimea numerelor reale (care uneori se mai numeşte continuul) adică N < C, deoarece N este echivalent cu o submulţime a lui C, dar nu cu C însuşi.

Acum să definim cîteva operaţii cu ajutorul cărora se pot construi mulţimi noi din mulţimi date. în fiecare caz în parte, mulţimile cărora li se aplică operaţiile pot fi finite sau infinite. (1) S + T, care se numeşte sumă logică (sau *reuniune)* a lui S şi T, conţine acele lucruri care sînt elemente n'e ale lui S, fie ale lui T, şi nimic mai mult. (2) ST, care se numeşte produsul interior (sau *intersecţie)* a lui S şi T, conţine acele lucruri care sînt elemente atît ale lui S, cît şi ale lui T, şi nimic mai mult. Aceste două noţiuni se întîlnesc şi la Boole, dar ceea ce urmează este nou. (3) S X T, care se numeşte produsul exterior (sau *produs cartezian)* dintre S şi T, este acea mulţime ale cărei elemente sînt toate perechile ordonate care conţin un element din S şi un element din T. (4) S^T, care uneori se numeşte inserţia mulţimii S în T, este mulţimea tuturor aranjărilor posibile (sau a funcţiilor univoce) prin care elementele lui S se pot atribui diferitelor elemente ale lui T atunci cînd *(a)* T nu este vid, *(b)* se permite ca un element al lui S să poată fi atribuit la mai mult decît un singur element al lui T şi (c) două aranjări se consideră ca diferite dacă există cel puţin un element al lui T căruia i se atribuie diferite elemente din S. Astfel, dacă T este mulţimea eprubetelor şi S este o mulţime de substanţe chimice, S^T este mulţimea posibilităţilor de a insera

---

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡a acestei lucrări, aparţinînd lui D. A. Steele, conţine unele date interesante, inclusiv referirile de mai sus la Plutarh şi Produs.

§§§§§§§§§§§§§§§ *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii,* Def. XVII.

**********[16] *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* I *(Opere,* ed.

†††††††††††††††nazionale, voi. VIII, p. 78).

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡[14] *Paradoxien der Unendlichkeit,* § 20. Introducerea istorică la traducerea engleză

substanţele în eprubete astfel încît nici o eprubetă să nu conţină mai mult decît o singură substanţă.

Printre mulţimile care se constituie prin inserţie în S, există una de importanţă deosebită, denumită mulţime-putere *(Potenzmenge)* a lui S. Aceasta este mulţimea tuturor submulţimilor lui S (în care includem atît pe S însăşi, cît şi mulţimea nulă) şi este reprezentată frecvent fie prin P(S), fie prin "<#S", în care litera *"CIP'* provine din cuvîntul german *Vntermenge.* Pentru a vedea că <7^S este într-adevăr o mulţime constituită prin inserţie în S, este suficient să ne dăm seama că o submulţime a lui S este determinată îndată ce pentru fiecare element al lui S s-a decis dacă trebuie sau nu să fie inclus în submul- ţimea considerată. Pe scurt, = {da, nu}^{s}, unde {da, nu} este mulţimea posibilităţilor pe care o are fiecare element al lui S în cursul selecţiei unei submulţimi. Or, Cantor declară că *QVi* are un număr cardinal mai mare decît S, oricare ar fi S ; iar această propoziţie este atît de importantă în teoria lui, încît ea a devenit cunoscută subl numele de teorema lui Cantor". Evident, S este echivalentă cu o parte a lui <%S, şi anume cu mulţimea tuturor mulţimilor-unitate§§§§§§§§§§§§§§§§
ale căror elemente sînt trase din S, şi deci pentru ţelul lui Cantor este suficient de a proba că S nu este echivalentă cu întreaga <7/S. Să presupunem pentru scopurile argumentării că S şi ar fi echivalente. Aceasta ar fi tot una cu a spune că există o anumită schemă de corelaţii în cadrul căreia elementele lui S sînt corelate biunivoc cu elementele lui Or, elementele din sînt toate submulţimi
ale lui S şi atunci ne putem întreba în mod rezonabil pentru fiecare element al lui S dacă el se corelează sau nu cu sine însuşi în această schemă. Să considerăm acum mulţimea care conţine toate acele elemente din S care nu sînt elemente ale corelatelor lor şi numai pe acestea. La rîndul ei, aceasta trebuie să fie şi ea un element al lui 7/S, să zicem u*, şi astfel, conform ipotezei pe care am adoptat-o, ea trebuie să fie corelată cu un anumit element al lui S, să zicem s*. Este s* un element al lui u* ? Dacă spunem "da", ajungem la o contrazicere, căci, conform definiţiei noastre, orice element din S care nu este conţinut în u* trebuie să fie un element al corelatei sale, iar aceasta este absurd, aşa că trebuie să respingem ipoteza că S ar fi echivalent cu 7/S. Pe

§§§§§§§§§§§§§§§§ Se numeşte mulţime-unitate mulţimea cu un singur element (Nota trad.).

scurt: 'TZS > S. în concepţia ei generală, demonstraţia este similară cu aceea că numerele reale nu sînt numărabile, deoarece ea arată imposibilitatea unei anumite corelaţii propuse arătînd că această corelaţie ar permite definirea unui element care nu are acoperire. Din acest motiv se spune uneori că această argumentare este un exemplu de procedeu diagonal Cantor, deşi extracazul pe care îl introduce pentru a respinge ipoteza echivalenţei nu este literalmente un şir diagonal.

După cum arată simbolurile, operaţiile cu ajutorul cărora se pot forma mulţimi pornind de la mulţimi se introduc pentru a pregăti calea spre o aritmetică generală a numerelor cardinale. De exemplu, dacă S şi T se exclud reciproc (adică sînt disjuncte), atunci S + T = = S + T, unde a doua utilizare a lui ” + ” înseamnă adunare a numerelor cardinale. La fel, S X T = S xT, iar S^T = SL Cîtă vreme ne ocupăm doar cu mulţimi finite, rezultatele nu au în ele nimic surprinzător. Dar dacă luăm în considerare mulţimi infinite, aritmetica la care conduc definiţiile este în mod inevitabil diferită în multe privinţe de aritmetica numerelor naturale. De exemplu, avem

$$X_o = \qquad n — n \ \mathbf{HQ} =$$

unde X_o este numărul cardinal al mulţimii numerelor naturale iar *n* este orice număr natural mai mare decît 0. Pe de altă parte, exact cum pentru orice număr natural *c* avem 2" > *n,* tot astfel 2»« > X_o, şi în general 2^C > *c* pentru orice cardinal *c,* indiferent dacă este finit sau transfinit. Aceasta constituie un corolar imediat al teoremei lui Cantor, într-adevăr, > S şi = 2®, astfel încît 2® > S, oricare ar fi S. Avem astfel un şir nesfîrşit de cardinale transfinite din ce în ce mai mari (denumite alefi) : X_o, 2^{I}'«, $2^{2^{**********}}$ ††††††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡’, etc. Prin definiţie, primul dintre acestea este numărul cardinal al lui N, mulţimea numerelor naturale, iar al doilea se poate arăta că este numărul cardinal al lui C,

---

**********[17] *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalizcd Continuum-hypothesi with the Axioms of Set Theory (Annals of Mathematics Studies,* no. 3).

†††††††††††††††† în prezent este cunoscut (P. Cohen, 1963) că ipoteza continuului este independent de celelalte axiome ale teoriei mulţimilor, adică în principiu se pot construi diferite teor ale mulţimilor care satisfac sau nu această cerinţă (Nota trad.).

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Gesammelte Abhandlungen,* pp. 282, 477, 480.

mulţimea (sau continuul) numerelor reale pe care am examinat-o la începutul acestei secţiuni. Dar nu se ştie dacă $2^{I'}$« este sau nu Xj, adică numărul transfinit *imediat următor* lui X_o. Cantor presupunea că aşa este, iar Godel a arătat că ipoteza generalizată a continuului, adică propoziţia că 2*" = X„+i pentru orice număr ordinal *n,* este cel puţin consistentă cu anumite axiome acceptate pe scară largă ale teoriei mulţimilor[17]; dar pînă acum, nimeni nu a demonstrat imposibilitatea unei mulţimi care să nu fie echivalentă nici cu N, nici cu C, dar să aibă o submulţime echivalentă cu N şi să fie ea însăşi echivalentă cu o submulţime a lui C.*

Ca şi toţi matematicienii mari. Cantor considera că lucrările sale reprezintă descoperirea unor legi care nu sînt făcute de oameni. El susţinea că nu e decît un scrib ascultător care nu are alt merit decît stilul său şi economia expunerii[18]. Dar admiratorii săi au tratat adesea teoria sa a mulţimilor ca şi cum ar fi o creaţie de vis asemănătoare cu *Kubla Khan* al lui Coleridge, pe cînd adversarii săi au văzut în ea un coşmar. Ceea ce pe unii i-a fascinat iar altora le-a repugnat în această doctrină a fost succesiunea nesfîrşită a cardinalelor transfinite ; or, după cum am văzut, aceasta decurge din teorema sa cu privire la mulţimile putere. Demonstraţia acestei teoreme este un raţionament *ad absurdum,* construit cu ajutorul procedeului diagonal caracteristic lui Cantor, şi de aceea nu constituie o surpriză faptul că sus- pectarea teoriei generale i-a condus pe unii matematicieni la îndoieli în ce priveşte utilizarea fără restricţii a raţionamentelor *aa absurdum* în demonstraţiile de existenţă.

3. *Frege despre precursorii săi*

Frege a fost unul dintre puţinii care au admirat lucrările lui Canto atunci cînd ele au apărut pentru prima oară. în *Grundlagen,* el scrie

„De curînd, într-o lucrare remarcabilă, G. Cantor a introdus numerele infinite *(Grund- lagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* Leipzig, 1883). împărtăşesc întru totul părerea sa că în principiu nu numai numerele finite trebuie să fie admise ca actuale. Ele sînt tot atît de puţin senzorial perceptibile sau spaţial localizate ca fracţiile sau numerele negative, cele iraţionale şi cele complexe ; dacă denumim actual ceea ce acţionează asupra simţurilor noastre, sau cel puţin produce efecte cu consecinţe mai apropiate sau mai îndepărtate asupra percepţiilor senzoriale, atunci fireşte că nici unele dintre aceste numere nu sînt

actuale. Dar nici nu avem nevoie de asemenea percepţii ca temei demonstrativ pentru teoremele noastre. .. Deşi din acest punct de vedere cred că sînt de acord cu Cantor, terminologia mea diferă într-o anumită măsură de cea a lui. Ceea ce eu numesc număr, el numeşte „putere", în timp ce conceptul său de număr se referă la ordonare .. . în ceea ce ne priveşte, întrucît conceptul nostru de număr acoperă de la bun început numerele infinite, n-a fost necesară nici un fel de extindere"[19].

Iar apoi, după unele comentarii asupra ideii cantoriene de număr ordinal, idee pe care noi nu am menţionat-o în secţiunea anterioară, el continuă:

„în nici un caz, nimic din ceea ce am spus nu pune sub semnul întrebării legitimitatea sau fertilitatea lor. Dimpotrivă, salut investigaţiile lui Cantor ca pe o extindere a frontierelor ştiinţei, îndeosebi întrucît ele au deschis o cale pur aritmetică spre numere (puteri) superioare transfinite"[10].

Aceste observaţii merită să fie reţinute cu atît mai mult cu cît ele intervin către sfîrşitul unei cărţi care conţine multe critici ostile la adresa altor autori. Obiecţiile pe care le aduce Frege împotriva abordărilor precedente ale aritmeticii sînt de fapt atît de numeroase încît ar fi imposibil să le rezumăm pe toate aici. Dar, pentru a clarifica direcţia gîndirii sale şi pentru a arăta de ce s-a alăturat el lui Cantor, trebuie să examinăm ce avea de spus împotriva a trei rivali în filosofia aritmeticii, şi anume împotriva lui J. S. Mill, a lui Kant şi a formaliştilor.

De la greci încoace s-a acceptat aproape în unanimitate că matematica este o ştiinţă *a priori,* adică o ştiinţă în care toate propoziţiile se pot stabili fără vreun apel la datele experienţei, pentru a ne informa asupra unor obiecte particulare. De fapt, tocmai reflecţia cu privire la natura acestui studiu i-a condus pentru prima dată pe filosofi la concepţia că învăţarea este posibilă şi fără experienţă. Dar, în secolul al XlX-lea, J. S. Mill s-a orientat împotriva empirismului lui Hume şi a încercat să susţină că aritmetica se întemeiază pe inducţii pornind de la fapte referitoare la anumite grupe de lucruri. El susţinea Ică pentru a demonstra egalitatea „5 + 2 = 7" trebuie să facem apel la axioma că „ceea ce este compus din părţi, este compus din păr- :ile acestor părţi" şi la definiţiile „7 = 6+1" şi „6 = 5 + 1"; iar el spunea că axioma, fiind „evidentă simţurilor în toate cazurile §§§§§§§§§§§§§§§§ care pot fi supuse deciziei lor şi atît de generală încît este coextensivă cu natura însăşi", trebuia să fie

§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gl.,* § 85.
[90] *Gl.,* § 86.

considerată ca „un adevăr inductiv, sau o lege a naturii de nivel superior” ; el argumenta că chiar şi definiţiile implică asertarea unor fapte fizice cu privire la existenţa unor colecţii decompozabile într-un anumit fel**********. De aceea, Frege considera că *Grundlagen* trebuie să înceapă prin a susţine caracterul aprioric al aritmeticii.

împotriva analizei definiţiei la Mill, Frege subliniază că dacă cunoaşterea unor anumite fapte fizice particulare ar fi necesară pentru utilizarea corectă a definiţiei fiecărui număr mic, atunci această cunoaştere ar fi necesară şi pentru utilizarea corectă a definiţiei fiecărui număr mare. De exemplu, noi n-am putea pune

$$1.000.000 = 999.999 + 1$$

înainte de a fi observat o colecţie de un milion de lucruri formată tocmai în acest fel; iar un om care a calculat cu numere cu nouă cifre ar trebui să fie demn de cele mai înalte onoruri pentru cunoaşterea naturii de care a dat dovadă††††††††††††††. împotriva tezei că legile generale ale aritmeticii sînt adevăruri inductive, el ridică obiecţia că inducţia însăşi pare să pretindă anumite propoziţii generale ale aritmeticii, deoarece utilizarea în care se presupune că inducţia este o metodă a ştiinţei şi nu numai un proces de deprindere depinde de teoria probabilităţilor‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡. Dar cea mai puternică critică pe care Frege o aduce întregii teorii empiriste este aceea că ea implică confuzia de a presupune că semnul plus se referă la adunarea fizică§§§§§§§§§§§§§§§§. Cînd spunem că 5 + -|- 2 = 7, noi nu avem în vedere că, dacă am adăuga două unităţi de volum lichid la cinci unităţi de volum lichid, am obţine şapte unităţi de volum lichid. Această din urmă propoziţie este în cazul cel mai bun o aplicaţie a propoziţiei matematice şi este valabilă numai cu condiţia să nu intervină în rezultat vreo alterare a volumului, de exemplu vreo reacţie chimică. Alte aplicaţii ale formulei ar putea fi la numere de evenimente, la virtuţi sau la rădăcini ale ecuaţiilor, unde nu poate fi vorba despre agregare fizică.

După ce a terminat cu teoria empiristă, Frege trece la problem: caracterului sintetic sau analitic al legilor

---

********** *A Systcm of Logic,* 111, XXIV, § 5.
†††††††††††††††† *Gl.* § 7.
‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Gl.,* § 10.
§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gl.,* § 9.

aritmeticii. Chestiune; a fost ridicată pentru prima oară de către Kant, şi Frege îl consider; pe acesta drept exponentul principal al punctului de vedere dup; care propoziţiile matematicii sînt sintetice, dar el nu acceptă dis tincţia pe care o face Kant între cele două tipuri de judecăţi. După cum spune chiar el, un adevăr este analitic dacă pentru demonstrarea lui trebuie să facem apel numai la legile logicii generale şi la definiţii, dar este sintetic dacă pentru demonstrarea lui trebuie să utilizăm premise care nu sînt de natură general logică********** ††††††††††††††††. Kant era foarte aproape de acest punct de vedere atunci cînd încerca să lege adevărul judecăţilor analitice de principiul necontradicţiei[29], dar din păcate el a lucrat cu un concept de logică prea restrîns. Atunci cînd se întreba dacă conceptul predicat era sau nu conţinut în conceptul subiect al unei judecăţi, Kant utiliza un criteriu care este aplicabil numai judecăţilor universal-afirmative din schema lui Aristotel.

în judecăţile singulare sau existenţiale conceptul de subiect nu apare. Se pare că el concepea definiţia unui concept complex doar ca o listă de note, în timp ce definiţiile cu adevărat importante din matematică, de exemplu aceea a continuităţii unei funcţii, nu sînt de acest tip‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡. Aici Frege pune degetul pe o carenţă a logicii tradiţionale care nu fusese observată nici măcar de acei predecesori ai săi care s-au interesat cel mai îndeaproape de această chestiune. Leibniz, de exemplu, considera conceptele şi propoziţiile în maniera presupusă de analiza adevărurilor analitice la Kant; după cum am văzut, acesta a şi fost motivul principal pentru care el nu a reuşit niciodată să dea un exemplu convingător al marii dezvoltări pe care a proclamat-o în scrierile sale de logică. Boole, de asemenea, s-a mulţumit să cerceteze doar acele tipare relativ simple de structură care pot fi reprezentate prin cercurile lui Euler. Frege ar fi avut mai multă dreptate să vorbească de o nouă logică tocmai pentru că el permitea o mai mare complexitate a formelor logice decît aceea pe care au fost în >tare să o conceapă predecesorii săi. în lucrările sale, „analitic” ;rebuie înţeles prin referire la propria sa logică şi în nici un caz ca un inonim pentru ceea ce Locke înţelegea prin „trivial”.

Deşi Frege îl critică pe Kant în ce priveşte distincţia dintre

---

********** “ *Gl„* § 3.

†††††††††††††††††† ’• *Critica rafiunii pure,* B. 191.

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ " *Gl„* § 88.

adevărurile analitice şi cele sintetice şi respinge felul său de a înfăţişa ritmetica, spre sfîrşitul lucrării sale *Grundlagen,* el scrie:

„Pentru a nu-mi atrage reprosul de a fi căutat să şicanez un geniu pe care cu toţii u-l putem privi decît cu admiraţie recunoscătoare, cred că este cazul să reliefez şi acordul e idei, care are o pondere cu mult mai mare. Pentru a vorbi numai despre ceea ce este nediat relevant, văd un mare merit al lui Kant în distincţia dintre judecăţile anali- ce şi cele sintetice. Arătînd că adevărurile geometriei sînt sintetice *a priori,* ne-a relevat adevărata lor natură. Acest lucru merită să fie repetat şi astăzi, şoarece adesea el nu este recunoscut. Deşi Kant a greşit în ce p.iveşte aritme- :a, aceasta, cred eu, nu poate micşora în mod series valoarea operei sale. El a vrut să arate că există judecăţi sintetice *a priori*; dacă ele apar numai în geometrie sau se găsesc şi în aritmetică, acesta este un lucru de mai mică importanţă”[§§§§§§§§§§§§§§§§§§] [**********].

într-un pasaj anterior, el ne spune că geometria se întemeiază într-adevăr pe intuiţie, după cum spusese Kant, şi că axiomele ei guvernează orice este intuibil spaţial, inclusiv cele mai stranii viziuni delirante sau cele mai îndrăzneţe invenţii poetice:

„Numai gîndirea conceptuală poate într-un fel să se elibereze, atunci cînd ea acceptă, să spunem, un spaţiu cu patru dimensiuni sau cu o curbură pozitivă. Studiul unor asemenea concepţii nu este în nici un caz inutil; dar el depăşeşte cu mult ceea ce poate fi întemeiat prin intuiţie . . . Pentru ţelurile gîndirii conceptuale putem totdeauna presupune contrariul uneia sau alteia dintre axiomele geometrice, fără a ajunge la auto-contradicţii atunci cînd ajungem astfel la concluzii care contravin intuiţiei noastre. Faptul că aceasta este posibil arată că axiomele geometriei sînt independente una de alta şi de legile primitive ale logicii şi că, deci, ele sînt sintetice”[28].

Din aceste explicaţii rezultă că Frege nu voia să nege posibilitatea geometriilor neeuclicliene (în sensul larg al cuvîntului „geometrie”) ; dacă i s-ar fi cerut lămuriri, el ar fi răspuns probabil că aserţiunile matematicienilor care studiază asemenea sisteme sînt într-adevăr analitice, deoarece conform cu felul său de a vedea lucrurile ele nu pot fi decît cel mult enunţuri condiţionale, garantate prin forma lor logică. De aici, el ar fi putut ajunge să admită ca analitică şi geometria euclidiană, considerată ca ramură a matematicii pure. în ce priveşte) adevărul — dacă este adevăr — că axiomele lui Euclid se aplică în mod necesar la relaţiile din spaţiul intuit, el este nerelevant pentrr studiul sistemului pe care acestea îl determină. Dar el continuă să folosească vechea expresie de „adevăruri ale geometriei” pentru *i*

---

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gl.,* § 89.
**********[22] *Gl.,* § Î4.

acoperi atît axiomele şi teoremele, cît şi enunţurile despre legătur; dintre ele, şi aceasta explică distincţia de statut pe care o traseazi între geometrie şi aritmetică. Dacă cineva susţine că ar şti că axio mele geometriei lui Euclid sînt necesar adevărate în sensul în car înţelegea acest lucru Euclid, adică în calitate de enunţuri general cu privire la relaţii din spaţiul obişnuit, el se angajează într- doctrină a intuiţiei, ca aceea peluată de Frege de la Kant. Reciproc oricine respinge vreo invocare a intuiţiei ca sursă de cunoaştei *a priori* trebuie să înţeleagă că el nu mai este îndreptăţit să reţin vechiul punct de vedere cu privire la *oricare* dintre axiomele li Euclid. Pe scurt, teza care îl interesa pe Frege nu este respinsă dac se modifică accepţia cuvîntului „geometrie".

Trebuie însă să admitem, după cum spune şi Frege, că „invocă prea uşor intuiţia noastră lăuntrică atunci cînd nu putem indica vrei alt temei"†††††††††††††††††††. Este dificil să atribuim vreun sens clar spuselor lui Kant cu privire la intuiţie atunci cînd el vorbeşte despre aritmetică, într-unul din enunţurile sale cele mai explicite, el afirmă că pentru a aduna numerele 7 şi 5 trebuie să depăşim conceptele lor, „chemînd în ajutor intuiţia corespunzătoare pentru unul din ele, de exemplu cele 5 degete ale noastre" şi conchide că „judecăţile aritmetice sînt, aşadar, întotdeauna sintetice, şi cu atît mai mult cînd avem de-a face cu numere mari"‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡. Dar desigur că este o absurditate să susţinem că putem stabili adevărul egalităţii

$$135.664 + 37.863 = 173.527$$

chemînd în ajutor o intuiţie a 173.527 degete. Trebuie atunci să spunem că doctrina lui Kant se aplică la numere mici, în pofida propriei sale declaraţii explicite ? Dar nu există nici o deosebire fundamentală între numerele mici şi cele mari. Dacă formulele care cuprind numere de la 10 încolo, să spunem, se pot demonstra fără intuiţie, de ce nu s-ar putea aceasta şi pentru numere mai mici?§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ Şi iarăşi, ce să fie această presupusă intuiţie corespunzătoare unui număr? Aritmetica nu se referă la degete aşa cum s-ar putea spune despre geometrie că ea se referă la puncte, linii şi plane ; nici o intuiţie nu poate garanta aplicabilitatea

---

†††††††††††††††††††>• *Gl.,* § 12.
‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡*Prolegomene la orice metafizică viitoare,* § 2.
§§§§§§§§§§§§§§§§§§§*Gl.,* § 5.

adevărurilor aritmetice la toate [lucrurile care se pot număra. Mai mult, dacă orice adevăr al aritmeticii ar fi derivat doar prin intuiţie, atunci toate aceste adevăruri ar trebui să fie independente unele de altele şi de legile logicii, exact aşa cum am aflat că este cazul cu axiomele lui Euclid. Dar dacă încercăm să negăm vreuna dintre propoziţiile fundamentale ale ştiinţei numerelor, rezultatul nu va fi un alt sistem de aritmetică, ci o confuzie completă**********.

Din aceste considerente, Frege trage concluzia că bazele aritmeticii srebuie să se afle undeva mult mai adînc decît bazele ştiinţelor empirice, nai adînc chiar decît cele ale geometriei, aşa cum o concepe el. Domeniul numărabilului este cel mai întins dintre toate, întrucît il nu se limitează la ceea ce poate fi intuit şi nici măcar la ceea ce ixistă, ci cuprinde tot ce poate fi gîndit. Oare în acest caz nu este ezonabil să presupunem că legile numărului sînt intim legate de egile gîndirii? Atunci cînd Frege pune această întrebare, desigur ă el nu vrea să spună că aritmetica ar fi o ramură a psihologiei, ntr-adevăr, el repetă mereu că logica, şi odată cu ea aritmetica. pe care vrea s-o înfăţişeze ca o dezvoltare a logicii, este complet independentă de psihologie.în prefaţa sa la *Grundlagen,* de exemplu, el stabileşte ca prim principiu călăuzitor al operei sale că logicul trebuie întotdeauna separat de psihologic. Iar în prefaţa la *Grundgesetze* el atacă explicit toate încercările de a înfăţişa legile gîndirii ca generalizări psihologice, spunînd că speră ca lucrarea sa să ajute la eliberarea logicii de infecţia care pare să fi contaminat toate lucrările recente în acest domeniu. Ceea ce vrea să exprime prin întrebarea de mai sus, el spune şi în altă parte zicînd că legile aritmeticii nu sînt legi ale naturii, ci legi ale legilor naturii, adică principii fundamentale eu privire la ceea ce poate fi gîndit[34].

Aşadar, teza lui Frege constă în aceea că adevărurile aritmeticii sînt analitice, întrucît pentru demonstrarea lor nu avem nevoie decît de legile logicii şi de definiţii. Dar pe vremea lui se găseau mulţi matematicieni gata să accepte această teză şi totuşi să susţină o teorie a aritmeticii pe care Frege a respins-o. Punctul de discordie era natura definiţiei în matematică, iar Frege a considerat problema în mod evident de cea mai mare importanţă; în adevăr, spaţiul pe care îl acordă acestei chestiuni atît în *Grundlagen* cît şi în *Grund- gesetze* este mai mare decît cel acordat criticii altor

---

********** *Gl.,* § 14.

teorii ale matematicii.

Atunci cînd matematicienii din secolul al XlX-lea priveau progresul realizat de ştiinţa lor de la Renaştere încoace, ei aveau uneori impresia că noul ar fi mai curînd un produs al construcţiei umane şi nu o descoperire. După cum arată şi numele lor, numerele imaginare au fost considerate ca o invenţie încă din vechime, dar acum unii matematicieni considerau că toate numerele care sînt de alt tip decît cele naturale (ba chiar şi numerele naturale) pot fi privite în acelaşi fel. Această viziune ţinea de orientarea pozitivistă, adică antimetafizică a epocii. în lucrarea sa din 1867, *Theorie der complexen Zahlensysteme,* Hankel scria :

,,în prezent, numărul nu mai este un lucru, o substanţă care există după propriii* sale legi, independent de subiectul care le gîndeşte şi de obiectele care le generează, nu ma este un principiu autonom ca pe vremea pitagoreicilor. Problema dacă un numă există sau nu poate fi aşadar înţeleasă numai prin referire la subiectul care gîndeşt sau la obiectele despre care se gîndeşte şi ale căror relaţii le reprezintă numerele. C imposibil în sens strict, matematicianul consideră numai ceea ce este logic imposibi adică autocontradictoriu. Faptul că numere imposibile în acest sens nu pot fi admise n pretinde demonstraţie. Dar dacă numerele de care ne ocupăm sînt logic posibile, dac conceptul respectiv este clar şi pe deplin definit şi ca atare liber de contradicţie, atun< problema existenţei se poate reduce numai la aceea dacă există în domeniul actualuh sau a ceea ce are realitate pentru intuiţie un substrat, dacă există obiecte în care s manifestă numerele, adică anumite relaţii intelectuale”††††††††††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

Ceea ce vrea să spună acest pasaj nu este prea clar, dar sensul pare a fi că în matematica pută, spre deosebire de cea aplicată, problemele de existenţă nu-şi găsesc locul, întrucît totul se reduce la construcţii libere ale minţii umane, supuse doar restricţiilor logicii.

împotriva unei asemenea doctrine, Frege susţine că este absurd să vorbim despre definiţii creative:

„Am putea tot atît de bine să spunem următoarele: dintre numerele cunoscute pină acum, nici unul nu satisface sistemul de ecuaţii

$$x + 1 = 2 \text{ şi } *4\text{-}2=1,$$

dar nimic nu ne poate opri să introducem un simbol care rezolvă problema. Răspunsul va fi că problema conţine o contradicţie. Firește că da, dacă cerem ca soluţia să fie un număr real sau complex obişnuit; dar atunci n-avem decit să lărgim sistemul nostru de numere, să creăm numere care îndeplinesc aceste cerinţe noi I Să mai vedem apoi cum ne mai dovedeşte cineva vreo contradicţie I Cine ar putea spune că cutare sau cutare lucru nu este posibil cu numerele noastre noi ?... Să creăm şi alte numere care să permită însumarea seriilor divergente ? Nu I

---

††††††††††††††††††††[36] *Gl.,* § 87. F MHi?

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ Pp. 6 — 7, citate de Frege în *Gl.,* § 92.

Matematicianul nu poate crea lucruri după voie într-o mai mare măsură decît geograful; el nu poate decît să descopere ceea ce există şi să-i dea un nume"*.

Sursa iluziei trebuie căutată în istoria matematicii. De îndată ce au fost familiarizaţi cu operaţia de scădere a lui 2 din 3, matematicienii au început să vorbească despre operaţia de scădere a lui 3 din 2 şi au introdus simbolul „ — 1” pentru rezultatul acestei operaţii. Iar mai tîrziu, cînd s-au familiarizat cu noţiunea de rădăcină pătrată a unui număr real pozitiv, ei au început să vorbească despre rădăcina pătrată a unui număr negativ şi au introdus simbolul „i” ca o abreviere pentru 1”. în ambele cazuri se părea că domeniul de acţiune al matematicii a fost extins prin postularea a ceva neexistent anterior şi apărea tentaţia de a spune că s-au creat numere noi prin- Itr-o rearanjare a unor semne vechi. Dar acest fel de a vorbi cuprinde o eroare serioasă în ce priveşte definiţia. Cel ce îşi închipuie că a explicat pe deplin utilizarea semnului „i” scriind „i = ~\/—1”, trebuie să presupună dată semnificaţia semnului ,,"\/ ” ; or, în explicaţia niţială a utilizării acestui semn nu avem nimic care să justifice itilizarea sa în noul context. Dacă însă spunem că definiţia creativă i numerelor imaginare cuprinde totodată şi o extindere a definiţiei adicalului, reducem totul la o confuzie. într-adevăr, această doctrină . definiţiei bucată cu bucată a semnelor matematice implică faptul ă semnul rădăcinii pătrate nu era anterior pe deplin definit. Or, atîta timp cît nu era complet definit sau nu se cunoştea pe altă cale e anume desemnează un cuvînt, cuvîntul nu putea fi utilizat într-o

Gl., § 96. ştiinţă exactă — cu atît mai puţin în vederea dezvoltării ulterioare a propriei sale definiţii”[37].

Este uşor de înţeles de ce matematicienii au menţinut asemenea simboluri ca şi ” în cursul întregii dezvoltări a matematicii, deşi le-au dat sensuri diferite în diferitele etape ale evoluţiei matematicii. Fiecare calcul inferior este într-un anumit sens reprodus în calculul superior corespunzător. Dar această practică a produs unele confuzii, iar în *Grundgesetze* Frege susţine că am face bine să o evităm cel puţin în cercetările cu obiectiv filosofic.

„în loc de a defini la început un simbol pentru un domeniu restrîns şi a-l folosi apoi în vederea propriei sale definiri pentru un domeniu mai extins, trebuie doar să alegem semne diferite astfel incit semnificaţia primului să

fie limitată odată pentru totdeauna la domeniul mai restrîns ; în acest fel, prima definiţie este acum completă, iar linia de hotar este net demarcată. Aceasta nu prejudiciază în nici un fel relaţia dintre semnificaţia primului semn şi semnificaţia celuilalt; putem să cercetăm această relaţie, fără ca rezultatul investigaţiei să facă posibilă punerea sub semnul întrebării a justificării definiţiilor. De fapt, merită să inventăm un simbol nou dacă putem astfel să evităm nu puţine dificultăţi logice şi să asigurăm rigoarea demonstraţiilor. însă mulţi matematicieni se pare că au un simţ atît de redus pentru puritatea şi acurateţa logică, incit preferă să utilizeze un cuvînt pentru trei sau patru lucruri diferite, decit să ia decizia de a inventa un cuvînt nou”§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ ********** ††††††††††††††††††††.

Apoi, cei care vorbesc de definiţii creative dezvăluie confuzia gîndirii lor cînd spun că trebuie să avem grijă de a evita autocontradicţia atunci cînd introducem termeni noi. Desigur că ei au intenţii bune atunci cînd doresc să evite inconsistenţa, dar cum îşi propun ei să demonstreze consistenţa noilor construcţii ? „Desigur că, riguros vorbind, nu putem stabili că un concept este liber de contradicţie decît producînd ceva care ţine de el. Reciproca ar fi o eroare”[39]. Iar dacă sîntem în situaţia de a indica ceva care ţine de acest concept, atunci este evident absurd să spunem că definiţia noastră a conceptului respectiv ar fi o creaţie. în practică însă, matematicienii care fac uz de asemenea limbaj vorbesc de consistenţă numai pentru că pînă acum nu s-a stabilit o inconsistenţă, şi abia apoi trec la ipoteza următoare : existenţa unor exemple. Este adevărat că uneori ei încearcă să justifice raţionamentele lor dubioase spunînd că în matematică „existenţa” înseamnă exact acelaşi lucru ca şi „consistenţa”; dai dacă Frege are dreptate, atunci acest fel de a vorbi este o agravare a culpei lor, deoarece el presupune că niciodată consistenţa nu se poate demonstra.

Conform cu punctul de vedere al lui Frege, fiecare calcul numeri» operează cu o anumită mulţime de obiecte, desigur nu cu obiect»

---

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gg,* **II,** § 57.
********** *Gg.,* **II,** § 60.
†††††††††††††††††††† *Gl„* § 95.

fizice cum ar fi pietrele sau cu obiecte psihice cum ar fi sentimentele, dar totuşi cu obiecte independente de orice limbaj. Atunci cînd vorbeşte despre definiţia unui concept în matematică, Frege nu are în vedere ceva asemănător cu activitatea constructivă presupusă de către oponenţii săi, ci doar delimitarea domeniului de aplicaţie a unui termen general cu ajutorul unei echivalenţe. Astfel, numerele complexe se pot defini ca perechi ordonate de numere reale, iar operaţiile cu numere complexe se pot defini prin referire la operaţiile cu numerele reale care intră în perechile respective. Faptul că facem uz de anumite sunete sau forme ca termeni definiţi este cu totul arbitrar. Dar în ce priveşte adevărurile pe care le enunţăm cu ajutorul lor, după ce le-am definit, nu mai încape arbitrar. în principiu, într-adevăr, este posibil să eliminăm toţi termenii pe care i-am definit explicit. în practica gîndirii matematice avem nevoie de ei numai pentru că fără ei ne-ar fi greu să ne concentrăm atenţia. Ei sînt, ca să spunem aşa, instrumente de selecţie. Pe de altă parte, în filosofia matematicii ne interesăm în mod special de definiţii tocmai pentru că stabilirea unui lanţ satisfăcător de definiţii arată posibilitatea eliminării tuturor termenilor definiţi. Ceea ce dintr-un punct de vedere se prezintă ca posibilitate de abreviere apare din alt punct de vedere ca o elucidare. în continuare, conform punctului de vedere al lui Frege, atunci cînd s-a stabilit un lanţ satisfăcător de definiţii devine clar că singurele noţiuni nedefinite necesare pentru prezentarea aritmeticii sînt noţiunile logicii formale. în particular, el vrea să arate că discursul asupra numerelor naturale se poate înlocui cu discursul asupra mulţimilor, claselor şi varietăţilor care, în terminologia logicienilor, sînt domenii de extindere pentru concepte; el spune în mod explicit că obiectele aritmeticii sînt obiecte logice‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

Dacă admitem că simbolurile matematice au semnificaţie şi că for- nulele matematice sînt utilizate pentru realizarea unor enunţuri, iu ne putem opune atacului lui Frege împotriva teoriei definiţiilor :reative, deşi încercarea sa de a reduce matematica la logică mai mate fi pusă sub semnul întrebării. însă teza că noul în matematică ste mai curînd creaţie decît descoperire a fost adesea însoţită de espingerea punctului de vedere că matematicienii ca atare emit nunţuri asupra unor obiecte oarecare ; tocmai de

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Gg„* II, § 147.

aceea, Frege acordă rult spaţiu demonstrării faptului că matematica nu poate fi conside- ată ca un joc cu semne lipsite de înţeles. Fireşte, nimeni n-a negat reodată că aplicarea aritmeticii implică atribuirea de semnificaţii mbolurilor aritmeticii, dar matematicienii care îşi zic formalişti u încercat să susţină că în matematica pură nu e nevoie să trecem

dincolo de simboluri şi de regulile combinării lor, adică dincolo de materialul asupra căruia avem un control complet. La începutul lucrării sale *Elementare Theorie der analytischen Functionen eines complexen Verânderlichen,* publicată în 1898, J. Thomae exprima precum urmează acest punct de vedere:

„Concepţia formală asupra numerelor acceptă limitări mai modeste decît cele propuse de concepţia logică. Ea nu-şi pune întrebarea ce sînt numerele şi încotro duc ele, ci numai ce li se cere în aritmetică. Pentru concepţia formală, aritmetica este un joc cu semne care se numesc vide. Aceasta înseamnă că ele nu au alt conţinut (în jocul de calcul) decît acela care le este atribuit prin comportarea lor faţă de anumite reguli de combinare (regulile jocului). Jucătorul de şah face uz de piesele sale în mod similar ; el le atribuie anumite proprietăţi care determină comportarea lor în cadrul jocului, iar piesele nu sînt decît semne exterioare ale acestei comportări. Desigur că între aritmetică şi şah deosebirea e importantă. Regulile şahului sînt arbitrare, pe cînd sistemul de reguli pentru aritmetică este astfel încît cu ajutorul unor axiome simple numerele se pot referi la varietăţi supuse percepţiei şi deci pot aduce o contribuţie importantă la cunoaşterea de către noi a naturii.. . Punctul de vedere formal depăşeşte astfel toate dificultăţile metafizicii; acesta este avantajul pe care ni-l oferă”§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§.

în volumul al doilea din *Grundgesetze,* publicat în 1903, Frege argumentează pe larg împotriva acestui nou adversar, susţinînd că este imposibil să prezentăm aritmetica pe care o cunoaştem fără ai presupune semnificaţii pentru semnele ei **********.

în primul rînd, el subliniază că formulele care sînt doar combinaţii ale unor semne lipsite de semnificaţie nu pot avea propriu-zis vreo aplicaţie. Ar fi un nonsens să vorbim despre aplicaţia şahului, dacă nu am presupus *de la bun început* o funcţie reprezentativă pentru piesele sale şi mutările lor, de exemplu luînd decizia că mutarea unu: pion ar însemna înaintarea unei patrule de cercetare în cursul une: bătălii armate. Or, dacă, după cum par să admită şi formaliştii tocmai posibilitatea de aplicaţie deosebeşte gîndirea matematică d(jocul de şah şi ne dă dreptul să o denumim progres în cunoaştere cînd anume trebuie să intervină atribuirea de semnificaţii ? Se presu pune că în matematica aplicată şi că o asemenea atribuire nu şi-a găsi locul în matematica pură. Frege nu neagă că ar fi posibil s executăm toţi paşii necesari pentru derivarea unei formule din sii- temul său deductiv făcînd abstracţie de semnificaţiile semnelor; da el spune că, departe de a aduce o simplificare

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gg„* II, §§ 88-89.
********** *Gg„* II, §§ 86-137.

importantă, un ase menea refuz de interpretare a semnelor ar face ca problema să fi şi mai dificilă. Întrucît interesul formulelor matematice rezidă î posibilitatea de a le aplica, trebuie să fim sinceri cu noi înşine şi s admitem că regulile noastre de calcul nu sînt alese în mod arbitra ci depind de semnificaţia pe care am atribuit-o simbolurilor noastr Un joc proiectat pentru a opera pe hîrtie cu semne lipsite de semnificaţie, după nişte reguli arbitrare, desigur că nu ar fi denumit ramură a matematicii.

în al doilea rînd, Frege atrage atenţia asupra faptului că, în anumite momente critice, formaliştii utilizează fără să-şi dea seama semnificaţii ale unor semne presupuse de ei ca lipsite de semnificaţie. Exemplul cel mai interesant al unei asemenea autoiluzionări în lucrarea lui Thomae este un alineat în care el spune că regulile jocului său de calcul sînt cuprinse într-o mulţime de şapte formule, cum ar fi „a -f- b = b + a" şi „a -|- (b + c) = (a + b) + c". Or, din felul în care procedează el ulterior rezultă că aceste formule trebuie să fie luate şi ca dispoziţii iniţiale în jocul său de calcul, adică ceva asemănător cu aşezarea pieselor pe tabla de şah la începutul unei partide. Dar cum poate fi dată o regulă printr-o aşezare a unor semne lipsite de semnificaţie? Ar fi o pseudosoluţie dacă cineva ne-ar indica aşezarea pieselor pe tabla de şah şi ar spune că aceasta reprezintă o regulă a jocului. Evident, Thomae vrea să spună că orice combinaţie de semne care apare într-o parte a semnului de identitate în vreuna din formulele sale se poate substitui în locul combinaţiei de semne care apare în cealaltă parte a aceluiaşi semn de dentitate, sau, mai curînd, dar mai complicat, că orice combinaţie le semne care intervine de o parte a seninului identităţii dintr-o ormulă, combinaţie care este structural, deşi poate nu alfabetic, imilară cu vreuna din cele şapte formule ale sale, se poate substitui lentru combinaţia care apare de cealaltă parte a aceluiaşi semn de lentitate. Pe scurt, semnul identităţii, aşa cum îl utilizează el aici, xprimă echivalenţa unor lucruri pentru ţelurile jocului său, iar lite- de sînt variabile care exprimă generalitatea. Pentru o bună înţelegere situaţiei trebuie să facem distincţia dintre joc şi teoria joculu[1]". în mp ce jocul poate să fie doar o manipulare cu senine lipsite de ■mnificaţie, teoria jocului, care lucrează cu regulile şi consecinţele r, nu poate fi formulată fără semne cu semnificaţie. în realitate, ;te vorba de o aritmetică în sensul obişnuit, şi

Thomae însuşi pare să Imită acest lucru într-un pasaj curios unde spune că uneori numele sale „au mai mult decît o simplă referire formală chiar în drul aritmeticii pure, de exemplu în propoziţia < această ecuaţie te de grad trei>”. Or, toate *teoremele* lui Thomae şi demonstraţiile r trebuie să aparţină teoriei jocului său de calcul, nicidecum jocului >uşi. Atunci cum poate să creadă el că a scăpat de restricţiile arit- eticii intuitive obişnuite?

în al treilea rînd, Frege arată, prin numeroase exemple, că forma- :ii confundă mereu numărul cu numeralul. Unii dintre ei identifică mod explicit numerele cu semnele sensibile, în timp ce ceilalţi

fac, după toate aparenţele, acelaşi lucru, fără a se angaja însă prin- tr-o declaraţie clară. în textele matematice găsim adesea autori care scriu ca şi cum nu ar exista nici o diferenţă între „s este cea mai mică rădăcină a ecuaţiei” şi „s desemnează cea mai mică rădăcină a ecuaţiei”. O asemenea omitere a distincţiei dintre *uzul* unui simbol şi *menţionarea* sa poate fi destul de inofensivă în numeroase contexte, dar într-o discuţie asupra fundamentelor matematicii şi în particular într-o expunere a doctrinei formalismului ea este extrem de periculoasă, într-adevăr, ea îi încurajează pe formalişti să creadă că pot spune cu privire la numerale lucruri care au sens numai cu privire la numere. De exemplu, Thomae scrie uneori despre numere ca şi cum ele ar fi nişte semne pe hîrtie, iar alteori ca şi cum ele ar forma un şir infinit, ordonat după mărime. în realitate, numerele formează, desigur, un şir infinit, fapt esenţial pentru dezvoltarea aritmeticii, de exemplu pentru teoria iraţionalelor ; dar mulţimea numeralelor particulare scrise sau imprimate pe hîrtie este şi va fi întotdeauna finită. Se mai poate adăuga că dacă un formalist ar încerca să-i răspundă lui Frege spunînd că el nu s-a gîndit la cceea ce Peirce numea „toked numerals” (numerale individuale), ci mai curînd la ceea ce Peircd numea ,,type numerals” (clase de numerale) (de exemplu „2” îil sensul în care „2” se poate scrie sau tipări de mai multe ori)[†††††††††††††††††††] l aceasta nu i-ar îmbunătăţi situaţia. în măsura în care putem spunl că în acest sens numeralele formează o infinitate, enunţul este garantai de faptul că avem în vedere infinitatea şirului de *numere* naturali Fiind dată o clasă de numerale, putem concepe un succesor construi! cu ajutorul sufixului dar

---

†††††††††††††††††††” C.S. Peirce, *Collected Papers,* IV, § 537.

numai întrucît pentru numereli
teoretic posibile asemenea sufixe nu sînt limitate. I

în al patrulea rînd, Frege arată că regulile stabilite de Thom J sînt cu totul inadecvate obiectivului său de reproducere a aritmeti J fără referire la semnificaţia semnelor. Se presupune că cele şapl formule menţionate mai sus acoperă toate numeralele şi **cl** interpretate în mod convenabil, ele sînt ireproşabile în calitate **<1** reguli generale; ele nu ne relevă însă nimic în ce priveşte trăsături" distinctive ale diverselor numerale. Este ca şi cum autorul unui mana" de şah ar da anumite reguli aplicabile tuturor pieselor, dar ar omil menţionarea existenţei pionilor, nebunilor şi a restului. Este adevăiB că Thomae remarcă unele particularităţi ale numărului 0, dar ceH ce spune el acolo sună foarte ciudat într-o expunere formalis® După Thomae, trebuie să excludem combinaţiile de semne H forma „2/0", deoarece împărţirea prin zero nu poate fi „realiz^B în mod unic (adică consistent)" iar „un cît al cărui numitor el O nu are semnificaţie". Dacă manipulările de semne în care se permite ca „0" să apară la dreapta semnului împărţirii conduc la rezultate de felul „1 = 2", cu ce poate aceasta să-l supere pe un formalist? Şi ce obiecţie specifică se poate aduce combinaţiei „2/0" într-un sistem în care toate combinaţiile de semne sînt lipsite de semnificaţie ? Pentru Thomae, unicul lucru convenabil este introducerea unei reguli noi, care interzice în mod expres aşezarea semnului „0" după (sau sub) linioară. Dar nici aceasta nu este suficient. Dacă vrea ca trăsăturile exterioare ale sistemului său să semene cu cele ale aritmeticii obişnuite, el trebuie să excludă şi combinaţii de felul „2/(3—3)" şi „2/(2 + 1 — 3)" ; pe scurt: orice combinaţie în care după bară apare o mulţime de semne ce se poate înlocui prin unicul semn „0". Evident, el nu poate să excludă pe fiecare în parte şi nici nu poate da un criteriu de recunoaştere pentru mulţimile de semne care în sistemul său se pot înlocui prin „0".

Criticile au fost fatale pentru filosofia aritmeticii a lui Thomae, însă ulterior vom vedea că un program mai tare decît acesta se poate realiza pentru un anumit gen de formalism. Acum, conform planului nostru, trebuie să trecem la examinarea doctrinei propriu-zise a lui Frege.

4. *Definiţiile lui Frege pentru numerele naturale*

Frege acceptă concepţia lui Leibniz, Mill şi a altora după care îumerele naturale mai mari decît 1 trebuie definite în raport cu iredecesorii lor, adică prin egalităţi ca „2 = 1 + 1", „3 = 2 + 1“ etc. Dar el observă că aceste definiţii rămîn incomplete atîta timp cît iumărul 1 şi noţiunea de creştere cu 1 sînt la rîndul lor nedefinite, şi trage atenţia totodată asupra faptului că elaborarea completă a ritmeticii necesită propoziţii generale‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡. Pentru aprofundarea proble- rei, el decide de aceea să cerceteze conceptul general de număr atural. înşirarea tuturor confuziilor comise în această problemă, e care Frege le găseşte în operele predecesorilor săi, pînă şi în operele nor matematicieni de prim rang, de la Euclid la Cantor, ar necesita n spaţiu prea larg; dar Frege însuşi a rezumat rezultatele retrospec- vei istorice făcute de el în următorul pasaj :

„Numărul nu este abstras din lucruri în modul în care sînt abstrase culoarea, greu- tea şi soliditatea, după cum nu este nici o proprietate a lucrurilor în sensul în care estea din urmă sînt proprietăţi. Mai rămînea întrebarea: cu privire la ce anume enun- m noi ceva, atunci cînd facem un enunţ despre număr ?. . . Numărul nu este ceva fizic, dar nu este nici ceva subiectiv, nu este o reprezentare. Numărul nu rezultă din alipirea unui lucru la un lucru . . . Cuvîntul „unu” ca nume propriu al unui obiect de cercetare matematică nu admite plural. Ca atare, este absurd să facem ca numerele să rezulte din alăturarea unităţilor. Simbolul plus în 1 + 1 = 2 nu poate semnifica o atare alăturare”§§§

aminte că în terminologia lui Frege un concept este ceva desemnat de un cuvînt sau de o expresie generală, utilizabilă în poziţia de predicat al unui enunţ, în timp ce un obiect este ceva ce poate fi denumit printr-un nume propriu şi despre care putem spune că ar cădea sub un concept sau că ar avea ca proprietate un concept. Opoziţia vizată nu este cea dintre mintal şi material, dar nici cea dintre ideal şi real, ci mai curînd cea dintre universal şi individual; şi totuşi, ea nd corespunde exact ultimei dintre aceste antiteze tradiţionale, deoarece! cu greu s-ar putea spune că expresia „Lună a lui Venus" semnifica un universal. I

S-ar părea că definiţia după care numărul 0 revine unui concepi dacă nici un obiect nu cade sub acest concept conţine un cerc viciosl într-adevăr, cuvîntul „nici unul" pare să fie numai o variantă a nul mărului „0". Dar putem preveni această obiecţie spunînd: „Nul mărul 0 revine conceptului F dacă, pentru orice *x, x* nu cade suM F". într-o formulare similară, putem spune de asemenea că numărul $n + 1$ revine conceptului F dacă avem un obiect *x* care cadl sub F şi astfel încît numărul *n* revine conceptului „cade sub F dai nu este identic cu *x".* Cu acest aparat, este evident posibil să explB căm în modul propus de Leibniz ce înseamnă a spune că 1, 2, ■ sau orice alt număr determinat revine unui concept. Dar Frege nB se mulţumeşte cu aceasta. E o iluzie — ne spune el — să ne închB puim că am fi definit numerele în acest mod. în realitate, nu am făcifl decît să precizăm sensul unor expresii ca: „Numărul 0 revine lfl . şi „Numărul 1 revine lui .. .". Deocamdată însă nu avem nici un drept „să selectăm 0 şi 1 ca obiecte de sine stătătoare care pot fi recunoscute din nou". Dar — după Frege — aceasta este esenţial pentru aritmetică întrucît numeralele sînt întrebuinţate acolo ca substantive. Desigur, numeralele apar în vorbirea obişnuită în calitate de adjective. Dar „Iupiter are patru Luni" poate fi înlocuit prin „Numărul Lunilor lui Iupiter este patru", unde „patru" este un substantiv iar „este" are sensul unui semn al identităţii; totodată a doua expresie este structurată mai bine decît prima. într-adevăr, deşi adjectivul „patru" concordă cu substantivul la plural „Luni" — cum ne spun gramaticienii — Lunile nu sînt de mai multe ori patru. în fapt, nu există vreo proprietate semnificată de cuvîntul „patru" despre care să putem spune că revine unui lucru, fie individ, fie o colecţie. Un număr nu este un concept, ci un obiect.

Frege are incontestabil dreptate să susţină că putem concepe obiecte care nu sînt nici sensibile, nici imaginabile. Are însă el dreptate cînd afirmă că numerele sînt obiecte în sensul lui special, adică nu sînt concepte ? Trebuie să admitem că adjectivele numerice nu se comportă la fel ca expresiile atributive uzuale: deşi este corectă afirmaţia că Iupiter are patru Luni††††††††††††††††††††, este absurd să spunem că fiecare dintre aceste Luni este patru, şi totodată este cel puţin bizar să spunem că mulţimea lor este patru. Mai mult, atunci cînd cuvîntul „patru" este folosit ca un substantiv, de exemplu în enunţul „Patru este un (număr par", el pare să se comporte, aşa cum spune Frege, ca un nume propriu. Ar fi stupid să spunem că rădăcinile a două ecuaţii ir fi amîndouă patru, deşi putem vorbi despre patru la plural‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ icolo unde contextul arată că vorbim despre numerale ca deosebite ie numere. Pe de altă parte, avem anumite substantive determinate :are desemnează multitudini, de pildă „pereche" şi „duzină", care rebuie clasificate în rîndul substantivelor comune, deoarece pot fi olosite la plural; acestea pot să apară ca predicate pentru mulţimi. ?ără îndoială, afirmaţia că grupa ucenicilor lui Isus era o duzină ire sens. După cum se pare, este un accident lingvistic faptul că >ptăm pentru exprimarea propoziţiilor numerice în acest mod sau în ltul din modurile menţionate mai sus. în latină, *miile* este un adjec- iv, dar *milia* este substantiv, iar în engleză „hundred" rămîne un ubstantiv, deşi „a hundred and one" este un adjectiv compus, itunci, de ce să nu identificăm numerele cu proprietăţile de a fi o pereche, o duzină etc. ? sau, pentru a recurge la terminologia lui Frege, cu conceptele „pereche", „duzină" etc. ? Se pare că atunci cînd vorbea despre *Mächtigkeiten,* Cantor avea în vedere această propunere care are marele merit al simplităţii. Orice om trebuie să admită că există mulţimi de diverse mărimi; conform definiţiei propuse, un număr ar fi tocmai însuşirea comună a tuturor mulţimilor de aceeaşi mărime. Sau, dacă, împreună cu Frege, considerăm mai nimerită afirmaţia că numerele revin conceptelor, de ce să nu identificăm numerele cu concepte de nivelul doi, ca,

---

†††††††††††††††††††††††† De fapt, Iupiter are 12 sateliţi. Autorul se referă, probabil, la cei patru sateliţi iai cunoscuţi, descoperiţi în 1610 de către G. Galilei, ceea ce nu contravine corec- tudinii demersului (Nota trad.).

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡»♦ în limba engleză, "four" admite pluralul "fours" (Nota trad.).

de pildă, conceptul de a avea o pereche de cazuri ilustrative?

Motivul pentru care Frege respinge această concepţie este inadecvat. Frege scrie:

„în propoziţia «Numărul 0 revine conceptului F», 0 este numai o parte a predicatului, luînd conceptul F ca fiind subiectul real. Din acest motiv, am evitat să numesc un număr cum este 0 sau 1 sau 2 o *proprietate* a unui concept. Tocmai pentru că formează numai o parte în ceea ce este enunţat, numărul individual apare ca un obiect de sine stătător. Am atras deja atenţia asupra faptului că noi vorbim despre „unul" acolo unde articolul hotărît serveşte pentru clasificarea lui 1 în rîndul obiectelor. în aritmetică, această existenţă independentă apare la fiecare pas, de exemplu în egalitatea 1 + 1 = 2"[4].

Cînd spune că 0 este numai un element al predicatului, el pare să subînţeleagă că dacă 0 ar fi o proprietate a conceptului F, am putea spune „conceptul F este 0". Dar aceasta este greşit. Dacă 0 este într-adevăr un concept, atunci a spune că „0 revine conceptului F" este un mod cît se poate de adecvat de a spune că 0 este o proprietate a conceptului F. într-adevăr, potrivit concepţiei sale „0" este tocmai o abreviere a expresiei „conceptul de a nu avea exemplificări", iar în unele contexte Frege îşi îngăduie să vorbească ca şi cum ar recunoaşte un atare concept. El spune, de exemplu:

„Prin proprietăţile afirmate despre un concept nu înţeleg, desigur, caracteristicile care alcătuiesc conceptul. Acestea din urmă sînt proprietăţi ale lucrurilor care cad sul concept, şi nu ale conceptului. De exemplu, «dreptunghic » nu este o proprietate a concep tului «triunghi dreptunghic», dar propoziţia că nu există nici un triunghi dreptunghi rectiliniu echilateral exprimă o proprietate a conceptului «triunghi dreptunghic recti liniu echilateral»; ea îi atribuie numărul zero. în această privinţă, existenţa este analoa gă cu numărul. O afirmaţie de existenţă nu este de fapt nimic altceva decît negare numărului zero. Întrucît existenţa este o proprietate a conceptelor, argumentul ontok gic pentru existenţa lui Dumnezeu eşuează''§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ **********.

Întrucît existenţa despre care vorbeşte aici nu este, strict vorbind existenţa unor concepte, ci existenţa unor obiecte care cad sub con cepte, proprietatea conceptelor cu care identifică el existenţa trebui să fie aceea de a avea una sau mai multe exemplificări. De aceet este probabil că refuzul lui Frege de a considera numerele drept concepte de nivelul doi a fost determinat în primul rînd de ideea că numerele au o subzistenţă de sine stătătoare, pe care conceptele nu o pot

---

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ *Grundlagen,* § 57.
********** *Gl„* § 53.

avea. Dacă este într-adevăr aşa, Frege a fost indus în eroare de una din propriile sale doctrine despre concepte, pe care o vom examina mai tîrziu. Oricum însă, trebuie să mergem mai departe şi să considerăm natura acelor obiecte cu care el încearcă să identifice numerele naturale.

în introducerea la *Grundlagen,* Frege a stabilit drept al doilea dintre cele trei principii .călăuzitoare ale sale că semnificaţia unui cuvînt nu trebuie căutată niciodată la acel cuvînt luat în mod izo-, lat, ci numai în contextul unui enunţ cu sens. Urmînd acest principiu el încearcă acum să obţină o definiţie a numerelor naturale în general, prin precizarea în prealabil a sensului unei identităţi numerice. Dacă numerele sînt obiecte de sine stătătoare, dar nu obiecte perceptibile, este, evident, de cea mai mare importanţă să precizăm cum le putem recunoaşte, adică, altfel spus, cum putem stabili identităţile între numere. Procedura propusă este similară cu cea a definirii direcţiei unei linii prin definirea în prealabil a identităţii de direcţie sau a paralelismului şi a abstragerii după aceea a noţiunii de direcţie. După cum se pare obiectivul principal al lui Frege este să explice sensul expresiei „numărul care revine conceptului F" ; el propune să explicăm sensul expresiei de mai sus prin intermediul ideii de corespondenţă biunivocă. Sugestia posibilităţii de definire a identităţii numerelor în acest mod datează cel puţin de la Hume[49], dar cînd Frege îşi elabora cartea, această propunere devenise de puţin timp încoace la modă printre matematicieni, aşa cum remarca el însuşi[50], în particular. Cantor a utilizat-o în *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* din 1883, şi Frege, aşa cum am văzut, admira opera lui Cantor, deşi uneori găsea prilejul să-l acuze, pe el ca şi pe alţi matematicieni, că vorbeşte fără acoperire despre „construcţii ideale".

Or, se poate spune că obiectele care cad sub două concepte F şi G sînt puse în corespondenţă prin relaţia O dacă (I) fiecare obiect care cade sub conceptul F este în relaţia O faţă de un obiect care [cade sub conceptul G şi (II) pentru fiecare obiect care cade sub conceptul G există un obiect care cade sub conceptul F şi se află faţă de el în relaţia 0. Totodată, putem înţelege că aceste condiţii sînt satisfăcute în mod vid atunci cînd nici un obiect nu cade sub nici unul din aceste două concepte. Pentru efectuarea unei

atari †††††††††††††††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ corespondenţe biunivoce *(beiderseits eindeutig)* mai trebuie să adăugăm alte două condiţii: (III) că, pentru orice *x, y* şi *z,* dacă *x* este în relaţia <I> faţă de *y* şi faţă de *z,* atunci *y* şi *z* coincid; şi (IV) că pentru orice *x, y* şi *z,* dacă *x* şi *y* sînt amîndoi în relaţia O faţă de *z,* atunci *x* şi *y* coincid. Trebuie notat că toate cele patru condiţii sînt exprimate în terminologia logicii formale (dacă acceptăm să includem „coincid" în această terminologie) şi că corespondenţa biunivocă poate fi explicată astfel fără să recurgem la cuvîntul „unu".

Pe această bază, Frege construieşte edificiul a trei definiţii:

(1) „Conceptul F este echinumeric *(gleichzahlig)* cu conceptul G" înseamnă acelaşi lucru cu „Există o relaţie O care pune în corespondenţă biunivocă obiectele care cad sub conceptul F cu obiectele care cad sub conceptul G".

(2) Numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F".

(3) *„n* este un număr" înseamnă acelaşi lucru cu „Există un concept astfel încît *n* este numărul care revine acestuia"§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§.

în (1) cuvîntul artifical „echinumeric" este menit, desigur, să sugereze identitatea numerelor care revin conceptelor la care se aplică acest cuvînt, dar sensul expresiei „număr ce revine conceptului" nu este stabilit pînă cînd nu ajungem la (2), iar în scopuri strict teoretice „echinumeric" trebuie luat ca o expresie unitară, avînd exact sensul pe care i-l conferă (1), adică: se numesc echinumerice acele concepte ale căror extensiuni sînt echivalente, potrivit terminologiei tehnice a teoriei mulţimilor. La fel, în (2) expresia „numărul care revine conceptului F" este destinată să sugereze accepţia obişnuită a cuvîntului „număr", dar aplicarea expresiei nu cuprinde un cerc vicios înainte ca să fie definit în (3) cuvîntul „număr". într-adevăr, în teorie strictă, (2) este doar explicarea întrebuinţării întregii expresii „numărul ce revine conceptului F" şi abia cînd căpătăm (3), obţinem o regulă pentru a vorbi despre un număr, fără a menţiona cutare sau cutare concept căruia acesta îi revine.

---

†††††††††††††††††††††††† *« Treatise,* 1, III, § 1.

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Gl.,* § 63.

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ *Gl.,* § 72.

Acest sistem de definiţii este o performanţă remarcabilă sub raportul ingeniozităţii filosofice, şi este uşor de văzut de ce Frege considera că a făcut cel puţin plauzibilă reductibilitatea aritmeticii la logică. Trebuie însă să ne întrebăm dacă definiţiile oferă o analiză satisfăcătoare a numerelor naturale, iar în acest scop trebuie să considerăm rînd pe rînd fiecare definiţie în parte. i

Dacă primul pas al lui Frege ar fi fost să stipuleze doar că expresia „echinumeric" este utilizabilă ca un substitut al unei expresii ma: lungi privitor la corespondenţa biunivocă, nu s-ar putea ridica, desigur, nici o obiecţie. Dar explicaţia preliminară pe care o dă arată clar că Frege consideră definiţia sa ca o analiză corectă a sensului pe care l-ar atribui orice om acestui adjectiv compus, dacă l-ar întîlni fără o stipu- lare specială. Tocmai aceasta vrea să spună declaraţia lui Frege că el intenţionează să obţină conceptul de număr pe baza descoperirii prealabile a sensului unei identităţi numerice. Or, considerată ca o elucidare a accepţiei obişnuite, definiţia (1) implică o dificultate, într-adevăr, dacă este evident că două concepte oarecare ale căror cazuri exemplificatoare sînt puse în corespondenţă în modul descris mai sus trebuie să fie echinumerice — în sensul că fiecare concept are tot atît de multe cazuri exemplificatoare ca şi celălalt —, nu tot atît de evident este şi faptul că între cazurile conceptelor echinumerice în sensul amintit trebuie să existe o atare corespondenţă.

Să considerăm un exemplu dat de Frege. El afirmă în mod corect: ..Dacă un chelner vrea să fie sigur că a pus la masă tot atit de multe cuţite pe cite farfurii, el nu are nevoie să numere farfuriile sau cuţitele; el nu are de făcut nimic altceva decît să pună un cuţit la dreapta fiecărei farfurii, avînd grijă ca fiecare cuţit <le pe masă să fie imediat în dreapta unei farfurii"**********.

Dar raţionamentul său nu demonstrează decît că corespondenţa biunivocă este o condiţie suficientă a identităţii numerice, dar nu şi o condiţie necesară. Poate că s-ar putea merge mai departe decît Frege în expunerea exemplului său, afirmînd că nu se poate *demonstra* că două concepte sînt echinumerice atîta timp cît nu există o corespondenţă biunivocă între cazurile lor. în adevăr, dacă numărăm obiectele care cad sub fiecare concept, stabilim o atare corespondenţă prin atribuirile de numere ordinale pe care le facem ; iar cînd într-un caz special sîntem în măsură

********** *Gl.,* § 70.

să recunoaştem o identitate numerică fără să numărăm, întrucît membrii unei mulţimi de lucruri sînt aranjaţi în aceeaşi formă ca şi membrii celeilalte, ca semnele de pe cărţile de joc de aceeaşi valoare, considerentul care prezintă importanţă aici este că fiecare membru ale unei mulţimi este pus în relaţie cu un membru şi numai unul din cealaltă mulţime prin relaţia de similaritate a poziţiei în cadrul formei considerate. Dar chiar şi aşa, nu este absurdă ideea că numărul cuţitelor de pe o masă ar putea fi acelaşi cu numărul farfuriilor, deşi cuţitele nu au fost puse în corespondenţă biunivocă cu farfuriile, prin procedeul chelnerului sau prin vreo altă metodă, de pildă prin trasarea unor linii. Conform doctrinei lui Frege, faptul — dacă este un fapt — că numărul cuţitelor coincide cu numărul farfuriilor reclamă existenţa *unei anumite relaţii* prin care cuţitele să fie puse în corespondenţă biunivocă cu farfuriile; şi totuşi, s-ar părea că corespondenţa de tip special pe care am ales-o spre menţiune ar putea lipsi fără vreo modificare a numerelor.

Dacă numărul cuţitelor este acelaşi cu al farfuriilor, este *posibil,* în mod corect, ca farfuriile să fie în corespondenţă biunivocă cu cuţitele, în timp ce între obiectele care cad sub concepte ce nu sînt echinumerice o asemenea corespondenţă nu poate exista. Fără îndoială, unul din motivele care a făcut ca dificultatea suscitată de definiţia lui Frege să fie trecută cu vederea de mulţi matematicieni este tocmai acesta, într-adevăr, noţiunea de corespondenţă biunivocă s-a bucurat pentru prima dată de o atenţie serioasă în legătură cu teoria cantoriană a numerelor transfinite, şi unicele mulţimi ce pot fi citate ca ilustrări plauzibile ale acelei teorii sînt împrumutate din matematica însăşi, adică dintr-un domeniu unde de obicei nu facem distincţie între posibilitate şi fapt. Aşa, de exemplu, nu are importanţă dacă spunem că numerele raţionale *pot fi* puse în corespondenţă biunivocă cu numerele naturale sau dacă spunem că ele *sînt* puse într-o asemenea corespondenţă printr-o relaţie funcţională. în afara matematicii pure, situaţia este cu totul alta; şi totuşi, dacă Frege are dreptate, simplul fapt că numărul cuţitelor de pe o masă este acelaşi cu numărul farfuriilor atrage după sine faptul că există o relaţie oarecare prin care cuţitele *sînt* puse în corespondenţă biunivocă cu farfuriile şi vor fi întotdeauna puse într-o asemenea corespondenţă, orice s-ar întîmpla, cu

singura condiţie ca numărul lor să nu se schimbe. Cum poate fi explicat acest fapt?

Dacă, aşa cum afirma Leibniz, indiscernabilele sînt identice, diversele obiecte care cad sub un concept trebuie să aibă atribute discernabile. Să presupunem că obiectele care cad sub conceptul F sînt discernabile pe baza atributelor F_2, F_2 şi F_3, fiecare dintre acestea atrăgînd după sine F, şi că obiectele care cad sub G sînt, de asemenea, discernabile, pe baza atributelor G_x, G_2 şi G_3, fiecare dintre acestea atrăgînd după sine G. Mai departe, să convenim a spune că *x* este în relaţia R cu *y* dacă şi numai dacă *x* şi *y* satisfac condiţia exprimată de formula complexă:

(x are Fi şi *y are* GJ sau *(x are* F_2 şi *y* are G_2)
sau *(x* are F_3 şi *y* are G_s).

Atunci, obiectele care cad sub F sînt puse într-o corespondenţă biunivocă prin această relaţie cu obiectele care cad sub G. Cu alte cuvinte, potrivit explicaţiei de mai sus, orice obiect care cade sub F este în relaţia R cu un obiect şi numai unul care cade sub G, în timp ce pentru orice obiect care cade sub G există un obiect ş: numai unul care cade sub F şi se află în relaţia R faţă de el. Pentrc simplitate, am folosit aceiaşi indici numerici spre a indica atributele distinctive de sub cele două concepte şi am cuplat atributele cu aceiaşi indici atunci cînd am alcătuit expresia lungă prin care definim R; dar această folosire a numeralelor nu este cîtuşi de puţin esenţială. Atributele distinctive de sub fiecare concept pot fi indicate în orice mod convenabil şi cuplate după plac cu atributele de sub celălalt concept, cu singura condiţie ca fiecare atribut distinctiv să apară în una şi numai una din conjuncţiile pe care le luăm în calitate de alternative. Pentru raţionament însă este esenţial ca singurele semne extralogice conţinute în definiţie să fie expresii pentru atributele distinctive ale obiectelor care cad sub cele două concepte F şi G. Dacă cineva obiectează că ceea ce am definit nu este ceea ce se numeşte de obicei relaţie, putem fi de acord cu această observaţie, dar trebuie să insistăm asupra faptului că aceasta este singura speţă de relaţii care se dovedeşte suficientă în toate circumstanţele pentru o corespondenţă biunivocă între obiectele care cad sub concepte echi-numerice.

Eventual, s-ar putea crede că o relaţie coordonatoare

adecvată este întotdeauna definibilă într-un mod mai simplu, fără să asumăm principiul leibnizian al identităţii indiscernabilelor, pe baza unei formule ca :

(x = A şi *y* = K) sau *(x* = B şi *y* = L) sau *(x* = C şi *y* = M), unde „A", „B" şi „C" sînt presupuse a fi nume proprii ale obiectelor care cad sub F iar „K", ,,L" şi „M" nume proprii ale obiectelor care cad sub G. Dar această obiecţie conţine două erori. în primul rînd, scopul nostru nu este chiar definirea relaţiilor în vederea coordonării claselor ai căror membri au fost cumva denumiţi. Noi urmărim să indicăm genuri de relaţii care sînt suficiente pentru coordonarea claselor, chiar dacă membrii lor nu au fost denumiţi şi poate nu vor fi denumiţi niciodată. Fără principiul lui Leibniz nu putem avea nici o garanţie asupra existenţei unor atare relaţii. în al doilea rînd, chiar cînd toate obiectele ce cad sub un concept au nume proprii, este limpede că aceste obiecte trebuie să poată fi distinse într-un fel sau altul fără ajutorul acestor denumiri, deoarece în caz contrar ele nu puteau fi denumite. Aşa încît invocarea principiului lui Leibniz nu este superfluă nici măcar în acest caz special.

în stadiul (2) al construcţiei sale sistematice, Frege trece la definirea numărului care revine conceptului F şi spune că acesta este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F". Întrucît expresia „echinumeric cu conceptul F" este aplicabilă cu adevărat numai la concepte, extensiunea conceptului pe care îl exprimă trebuie să fie o mulţime de concepte. Aşa încît, după ce obiectase împotriva ideii că un număr ar fi un concept, Frege pare să fi asumat concepţia că un număr este o mulţime de concepte. Dar aceasta nu este singura consecinţă curioasă a definiţiei sale. într-adevăr, el vrea să spună că conceptul F are un număr care îi revine şi, potrivit definiţiei pe care am citat-o, aceasta echivalează cu afirmaţia că conceptul F are o mulţime de concepte care îi revin, şi anume mulţimea conceptelor ale căror cazuri sînt în corespondenţă biunivocă cu propriile lui cazuri. Este greu să găsim vreo accepţie a cuvîntului „a reveni" *(Zukommen)* care să motiveze această pretenţie. Am putea spune eventual că conceptul F aparţine ca membru mulţimii conceptelor echinumerice cu el, sau că conceptul „echinumeric cu conceptul F" revine, ca o proprietate, conceptului F, dar nu că mulţimea conceptelor echinumerice cu conceptul F revine conceptului F într-unul

din aceste sensuri. Poate că Frege îşi dădea şi el seama că terminologia sa era bizară; într-adevăr, el remarcă într-o notă că, după părerea sa, expresia „extensiunea conceptului” ar putea fi înlocuită în cadrul definiţiei (2) cu cuvîntul „concept”[53]. Este însă evident că făcînd această concesie el nu intenţiona să retracteze afirmaţia sa anterioară după care numerele individuale ar fi obiecte, distincte de concepte; într- adevăr, Frege spune că este convins că ar putea explica această aparentă contradicţie, deşi această explicaţie l-ar îndepărta prea mult de subiect. Nu ştim cum ar fi procedat dacă şi-ar fi elaborat în alt mod teoria, dar o altă remarcă din acea notă ne arată la ce se gîndea atunci cînd a ales formularea dată în textul său.

în afară de aparenta contradicţie cu enunţurile sale anterioare, Frege consideră că mai există şi o altă dificultate, căreia trebuie să-i facem faţă printr-o elaborare alternativă a teoriei; este vorba de faptul „că conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă”. Pentru a ne da seama ce urmăreşte această remarcă, trebuie să considerăm implicaţiile situaţiei cînd numărul ce revine conceptului F este acelaşi cu numărul ce revine conceptului G. Evident, cele două concepte sînt echinumerice şi, deci, orice este echinumeric cu unul dintre ele este echinumeric şi cu celălalt, adică extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F” este identică cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G”. Dar aceasta nu înseamnă că conceptul „echinumeric cu conceptul F” este identic cu conceptul „echinumeric cu conceptul G”. Dimpotrivă, este evident că cele două concepte sînt distincte. Dacă definim numărul ce revine conceptului F drept conceptul „echinumeric cu conceptul F”, iar numărul ce revine conceptului G drept conceptul „echinumeric cu conceptul G”, ajungem în situaţia paradoxală cînd unul şi acelaşi număr reprezintă două concepte distincte. Evident, pentru cel ce vrea să susţină o teorie

---

[13] *Gl.,* § 68. ca cea a lui Frege, ieşirea cea mai uşoară din impas constă în definirea numărului ce revine conceptului F ca fiind *extensiunea* conceptului „echinumeric cu conceptul F”. Frege admite că definiţia pare stranie la prima vedere, dar o apără argumentînd că extensiunea la care se referă

prezintă şi proprietăţile şi relaţiile aşteptate pentru numărul care revine unui concept.

în stadiul (3) al construcţiei sale, Frege încearcă să explice cum putem vorbi despre numere în general fără să ne referim la vreun concept particular la care acestea aparţin, iar în acest scop el stipulează că „*n* este un număr" înseamnă acelaşi lucru ca „Există un concept astfel încît *n* este numărul care revine acestuia". Dacă putem accepta ceea ce precede definiţia, nu mai trebuie să căutăm nod în papură acestei definiţii; într-adevăr, este evident că în vederea practicării aritmeticii trebuie să fim în stare să vorbim despre numere fără vreo referire la anumite concepte, iar explicaţia problemei la Frege ne arată cum putem face aceasta păstrînd totuşi o legătură cu accepţia conform căreia spunem că numerele revin conceptelor. Dar definiţia de mai sus nu este în sine suficientă pentru fundarea aritmeticii, deoarece ea nu oferă decît o explicaţie a expresiei „*n* este un număr". Mai avem nevoie şi de definiţii ale numerelor individuale sau, mai bine spus, de o schemă generală care să îngăduie definirea unei infinităţi de numere şi care să ne permită astfel să demonstrăm toate teoremele aritmetice acceptate în mod uzual.

Or, în cadrul teoriei lui Frege, singurul mod de indicare a unui anumit număr constă în a vorbi despe el ca despre numărul ce revine unui anumit concept. Dar Frege vrea să expună aritmetica în calitate de dezvoltare a logicii, aşa că el nu poate introduce numerele individuale prin referire la concepte empirice, de exemplu spunînd că 5 este numărul ce revine conceptului „continent" iar 12 numărul ce revine conceptului „apostol". Mai mult, referirea la concepte empirice nu ar garanta existenţa unui şir infinit de numere cerut pentru dezvoltarea continuă a aritmeticii. De aceea, este esenţial ca Frege să permită definiţii ale numerelor individuale prin referire la concepte standard împrumutate din logica însăşi. Luînd 0 ca punct iniţial il şirului, el oferă următoarea schemă:

) este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine"
I „ „ „ „ ,, „identic cu 0"
! „ „ „ ,, „ „identic cu 0 sau cu 1"
î „ „ „ „ „ „identic cu 0 sau cu 1sau cu 2"

Aici, conceptul „neidentic cu sine" este presupus a proveni

din logica pură; evident, sub acest concept nu poate cădea nici un obiect. Aşa că, prima definiţie pare să satisfacă toate cerinţele cuvenite. Dar dacă prima definiţie nu conţine concepte extralogice, atunci nu conţin asemenea concepte nici celelalte definiţii, iar planul după care sînt construite permite continuarea *ad libitum.* S-ar părea deci că Frege a reuşit să realizeze ceea ce urmărea: să arate modul în care aritmetica poate fi redusă la logică.

în primul volum din *Grundgesetze,* Frege utilizează acelaşi raţionament, făcînd referiri la pasajele corespunzătoare din *Grundlagen.* în conformitate însă cu strategia generală a acestei lucrări mai tîrzii, el îşi formulează definiţiile, oriunde e posibil, prin intermediul unor semne pentru clase şi nu al unor expresii funcţionale; şi deci el continuă să afirme în textul său german că numerele revin conceptelor, semnul care are sensul de „numărul lui" apărînd întotdeauna în simbolismul său în faţa unui semn de clasă[54]. Dacă acceptăm să vorbim despre clase, putem admite această versiune a teoriei ca o simplificare rezonabilă. într-adevăr, conceptele care determină una şi aceeaşi clasă trebuie să fie, în mod evident, echinumerice potrivit modului de exprimare al lui Frege, iar numărul despre care Frege spune că aceste concepte îl au în comun poate fi caracterizat mai firesc ca revenind clasei determinate de aceste concepte. Acest mod de exprimare mai are meritul de a conecta definiţia fregeană a numărului cu teoria canto- riană a mulţimilor sau claselor. într-adevăr, corespondenţa biunivocă despre care vorbeşte Frege este acea relaţie între mulţimi pe care Cantor o numeşte echivalenţă, iar în limbajul lui Cantor inovaţiile din opera lui Frege pot fi rezumate foarte simplu prin următoarele două enunţuri:

(I) Numărul cardinal al unei mulţimi este mulţimea tuturor mulţimilor echivalente cu ea.

(II) Pentru numerele naturale 0, 1, 2, 3 etc., considerate ca mulţimi de mulţimi echivalente, putem lua ca exemplare sau membr standard anumite mulţimi definite în mod pur logic, şi anume pentru 0 — mulţimea lucrurilor neidentice cu sine, pentrt
1 — mulţimea al cărui singur membru este numărul 0, pen tru 2 — mulţimea ai cărei membri sînt numerele 0 şi 1 pentru 3 — mulţimea ai cărei membri sînt numerele 0, 1 ş

2 şi aşa mai departe.

Este curios însă că nici Frege şi nici Cantor nu au acceptat vreodat în mod explicit această analiză a numerelor. în *Grundlagen,* Freg spunea că *Anzahl* pe care l-a definit era acelaşi lucru cu *Măchtigke* ††††††††††††††††††††††††

†††††††††††††††††††††††† Vezi, de exemplu, definiţia lui 0 în *Gg.,* I, § 41.

a mulţimilor din teoria lui Cantor[55], dar într-o recenzie la această lucrare pentru *Deutsche Litteraturzeitung,* Cantor a negat aceasta şi a considerat că definiţia lui Frege este defectuoasă[68]. Deşi susţinea că este de acord cu programul de întemeiere a matematicii exclusiv pe logică, el obiecta împotriva anumitor subtilităţi introduse de Frege şi, în particular, împotriva caracterizării fregeene a numărului ca extensiune a unui concept deoarece, cum spunea el, conceptul ar putea fi „nedeterminat din punct de vedere cantitativ". Se pare că deosebirea se datora pur şi simplu unor neînţelegeri în ce priveşte accepţiile tehnice. Cel puţin aşa credeau Whitehead şi<Russell, care acceptau definiţia de mai sus a numărului, deşi, din motive care vor deveni clare într-un capitol ulterior, ei nu puteau accepta modul în care Frege garantează infinitatea şirului numerelor naturale.

5. *Şirul numerelor: Dedekind si Peano*

Pentru aducerea la îndeplinire a programului său de expunere a aritmeticii ca identică cu logica, Frege trebuia să definească mai întîi toate ideile aritmeticii într-un mod acceptabil, fără a recurge la o terminologie extralogică, şi să arate apoi că cu aceste definiţii toate raţionamentele aritmetice sînt reductibile la scheme logice valide. în particular, el trebuia să demonstreze că pentru validitatea inducţiei matematice (sau recursive) — adică pentru validitatea raţionamentului în care conchidem că, întrucît o proprietate revine numărului 0 şi totodată succesorului oricărui număr care se bucură de această □roprietate, aceasta trebuie să revină de aceea tuturor numerelor laturale — nu este necesară decît logica. într-adevăr, cei care pretind :ă aritmetica nu este identică logicii se referă îndeosebi la inducţie :a la particularitatea raţionamentului aritmetic şi spun că ea presupu- îe o anumită intuiţie a unei necesităţi extralogice. în *Grundlagen Ier Arithmetik,* Frege nu a încercat să trateze a doua parte a programului său în mod detaliat, considerînd, probabil, că această arcină este prea dificilă pentru o lucrare larg accesibilă. Ceea ce pune în această privinţă pare de aceea destul de obscur şi superficial, iar Frege arată destul de clar că este conştient de necesitatea unei nalize a inducţiei matematice, atunci cînd după ce citează din analiza rurilor ordonate, analiză dată la sfîrşitul cărţii sale *Begriffsschrift,* el :rie: „Numai prin intermediul acestei definiţii a succesiunii în cadrul riui

şir putem reduce raţionamentul de la n la $(n + 1)$, care aparent

este specific matematicii, la legile generale ale logic'i."[87] în fapt, el a asigurat tot ce se cere în acest scop, deşi nu a indicat conexiunile dintre aceste aspecte astfel încît să faciliteze sarcina cititorului.

Mai întîi, Frege afirmă că *„n* urmează imediat după *m* în şirul numerelor naturale" înseamnă acelaşi lucru ca „există un concept F şi un obiect *x* care cade sub acesta, astfel încît numărul care revine conceptului F este *n,* iar numărul care revine conceptului« a cădea sub F dar a nu fi identic cu **A:**»este *m".* Această definiţie este lesne de înţeles dacă luăm în considerare definiţiile numerelor individuale date către sfîrşitul ultimei secţiuni. Aşa cum spune Frege, nu este greu pentru cititori să vadă că relaţia astfel definită este biunivocă şi că orice număr, cu excepţia lui 0, este legat prin această relaţie de un anumit alt număr.[88] După aceea, Frege schiţează o demonstraţie pentru o propoziţie pe care nu o consideră atît de evidentă, şi anume propoziţia că pentru orice număr din şirul numerelor naturale există un număr imediat următor; şi tocmai cînd se angajează în această direcţie, el menţionează în treacăt posibilitatea reducerii inducţiei matematice la legile generale ale logicii.

în acel pasaj din *Begriffsschrift* la care se referă aici, Frege a explicat cum, fiind dată o relaţie $, am putea defini o altă relaţie, exprimabilă prin formula *„y* urmează în şirul <î> lui x"; de exemplu, fiind dată relaţia exprimată de *,,y* este copilul lui *x",* am pute: defini relaţia exprimată prin *,,y* este un descendent al lui *x".* îi viaţa cotidiană, noi am explica probabil semnificaţia cuvîntulu „descendent" spunînd: „descendenţii unui om sînt copiii săi precum şi copiii copiilor săi, şi aşa mai departe". Dar Frege nu er; satisfăcut cu aceasta, deoarece considera că în scopul reduceri aritmeticii la logică era necesar un mod de eliminare a expresie „şi aşa mai departe". Drept care, el a sugerat de fapt că *,,y* est un descendent al lui *x"* ar putea fi considerat ca însemnînd acela: lucru ca expresia *„y* are toate atributele care îi revin lui *x* şi car sînt transmise invariabil copiilor săi de către un părinte care ai aceleaşi atribute". La prima vedere, această propunere ar putea întîmpinată cu anumite rezerve. într-adevăr, înclinăm să spune: că, deşi un descendent al lui *x* trebuie să aibă incontestabil toat atributele ereditare din familia care porneşte de la *x,* nu este totu evident că orice persoană care se bucură de toate aceste atribu trebuie să fie un membru al familiei. La aceasta se poate ins răspunde că

unul din atributele ereditare în cadrul familiei es tocmai apartenenţa la această familie, astfel încît orice'persoană ca

[17] *Grundlagen,* § 80.

[48] *Grundlagen,* §§ 76 — 78. posedă *toate* atributele ereditare trebuie să se bucure şi de acesta din urmă.

Aplicînd metoda lui Frege la şirul numerelor, putem spune că *„y* urmează lui *x* în şirul numerelor naturale" trebuie să însemne acelaşi lucru ca *„y* are toate acele atribute care (I) revin lui *x* şi (II) sînt de aşa natură încît dacă ele revin unui anumit număr, ele revin totodată numărului imediat următor în cadrul şirului numerelor naturale". în fapt, Frege aplică tocmai această metodă în scopul special pe care îl urmăreşte în *Grundlagen.* Dar, pentru prezentarea raţionamentului prin inducţie matematică drept o mostră de raţionament logic, noi trebuie să facem un pas mai departe şi să spunem că *„n* este un număr natural" trebuie să însemne acelaşi lucru ca *„n* este identic cu 0 sau *n* are toate atributele care (I) revin lui 0 şi (II) sînt de aşa natură încît dacă ele revin unui obiect *m* ele revin totodată oricărui lucru care în şirul numerelor naturale urmea- Iimediat după *m".* Pentru corectitudinea acestei definiţii este esen- , desigur, ca acele cuvinte pe care le-am subliniat să poată fi dese ca un unic semn, conform explicaţiei citate mai sus la Frege. r dacă aceasta este garantat, restul este simplu. într-adevăr, for- larea uzuală a principiului inducţiei matematice poate fi privită m ca o abreviere a truismului logic : „Dacă P este un atribut e (I) revine lui 0 şi (II) este astfel încît, dacă el revine unui ect *m,* el revine şi la orice lucru care în şirul numerelor naturale îează imediat după *m,* atunci P revine oricărui lucru care sau ; identic cu 0 sau este înzestrat cu toate atributele care (I) in lui 0 şi (II) sînt astfel încît dacă revin oricărui obiect *m,* ele in şi oricărui lucru care în şirul numerelor naturale urmează diat după *m".* Cu alte cuvinte, validitatea principiului induc- matematice este făcută să depindă de faptul că şirul numere- naturale poate fi definit ca domeniul specific pentru inducţia tematică. Trebuie să observăm însă că această presupusă reducere aţionamentului aritmetic la logică implică referirea la toate atri- ele sau proprietăţile numerelor. în cele ce urmează, vom avea zia să revenim la acest punct.

n broşura sa *Was sind und was sollen die Zahlen ?* apărută în 1888, lekind a ajuns la concluzii oarecum similare, dezvoltînd în mod ependent un punct de pornire

diferit şi aplicînd o altă terminolo- . Conform terminologiei sale, putem spune că un sistem (sau mulţi- I de lucruri S are un alt sistem S' ca aplicaţie sau imagine *{Bild}* a dacă există o proiecţie sau o regulă de aplicare *(A bbildung)* <p e atribuie fiecărui element al lui S un lucru sau altul ca imagine i, iar S' este totalitatea acestor imagini ale elementelor lui S. Dacă iecţia atribuie întotdeauna imagini diferite unor elemente diferite din S, spunem că este asemenea *(ähnlich).* Evident, aici avem ceea ce alţi matematicieni au numit corespondenţă biunivocă. Mai departe se spune că un sistem K este un lanţ *(Kette)* relativ la o anumită proiecţie dacă conţine ca parte a sa (adică conţine ca un subsistem) pe K', care este propria sa aplicaţie potrivit acestei proiecţii, adică K' C K, unde „c" semnifică includerea în ceva.[89] Dedekind a introdus această terminologie? cam curioasă probabil din dorinţa de a atrage atenţia asupra faptului că aplicaţia conţinută într-un atare sistem trebuie să conţină, la rîndul ei, propria sa aplicaţie conform aceleiaşi proiecţii. într-adevăr, prima sa teoremă despre lanţuri este că aplicaţia unui lanţ este la rîndul său un lanţ. Altă teoremă a sa care poate fi demonstrată foarte uşor arată că orice lanţ care conţine un sistem A ca parte a sa trebuie să conţină şi A'. Mai departe, dacă A este o parte a unui lanţ S, intersecţia sau cea mai mare parte comună *(Ge- meinheit)* a tuturor lanţurilor — inclusiv S — care au drept parte pe A se numeşte lanţul lui A sau, prescurtat, A^. De asemenea, se poate demonstra uşor că orice lanţ care conţine ca parte A trebuie să conţină şi **Aq.** Dacă A are un singur element 1, Dedekind îş îngăduie să numească lanţul său l_0, deşi dacă ar fi urmat propria s< definiţie în mod strict? el trebuia să scrie $\{l\}_0$. Dar, oricare ar fi A trebuie să ţinem minte că A' şi Ao sînt determinate amîndouă printr-i anumită proiecţie. Cu acest aparat de termeni tehnici puter spune acum' că un sistem N este *simplu infinit* dacă există pentr el o proiecţie cp precum şi un element de bază 1 care satisfac cele patr condiţii:

a. N' C N.

P- N = l_0.

y. 1 nu este un element al lui N'.

8. Proiecţia cp este asemenea.

Şi, în sîîrşit, dacă ne concentrăm atenţia asupra îtructuiii sistemul N, făcînd abstracţie de natura specială a

elementelor, în măsura care ea nu este determinată de condiţiile enumerate mai sus, pute spune că N este sistemul numerelor ordinale.[60]

După Dedekind, a[T]itmetica este tocmai ştiinţa relaţiilor sau legii deductibile din condiţiile menţionate mai sus, şi una dintre cele tr importante legi de acest fel este principiul inducţiei matematic® pentru care putem sciie : „Dacă 1 este un element al lui P şi (NP)' ci atunci Nc P” ; aceasta, deşi Dedekind însuşi nu foloseşte nota® booleană a juxtapunerii literelor pentru intersecţii. Pentru demo®

•• Dedekind însuşi utilizează o variantă a semnului care arată ca un fel^H
numeral „3”.

•• *Was sind und was sollen die Zahlent,* § 6, 71 — 73. trarea acestei teoreme, raţionăm după cum urmează.®[1] întrucît 1 este element al [1]ui N şi, prin ipoteză, şi al lui P, putem admite că sistemul NP nu este vid. Acum, este evident că

$$NP \subset N,$$

de unde rezultă în conformitate cu definiţia aplicaţiei că

$$(NP)' \subset N'.$$

Dar ştim că

$$N' \subset N$$

pe baza condiţiei a, încît avem

$$(NP)' \subset N.$$

Dar, conform părţii a doua a ipotezei, avem şi

$$(NP)' \subset P,$$

iar din aceste două relaţii luate împreună rezultă că

$$(NP)' \subset NP,$$

adică rezultă că NP este un lanţ. Atunci, întrucît 1 este un element al acestui lanţ iar l_0 este cea mai mare parte comună a tuturor lanţurilor în care 1 este un element, putem afirma

$$l_0 \subset NP.$$

Dar, conform condiţiei Ş

I $N = l_0$,

ji astfel putem conchide

$$N \subset NP,$$

:are este echivalent cu $N \subset P$.

Această demonstraţie se bazează pe faptul că N, mulţimea

numere- or asupra căreia vrem să generalizăm, a fost declarată lanţ şi, în iarticular, acel lanţ care este cea mai mare parte comună a tuturor înţurilor care au ca element pe 1. Ca şi în raţionamentul lui Frege, aliditatea principiului inducţiei matematice este garantată aici rintr-o definiţie a numărului care cuprinde o referire la toate proprie- Iţile ereditare în cadrul unui şir. A spune, într-adevăr, că N este cea îai mare parte comună a tuturor lanţurilor care au ca element pe 1, iseamnă a spune de fapt că N este conţinut ca parte în orice lanţ P ire satisface ipotezele principiului inducţiei matematice, iar aceasta ++++++++++++++++++++ este o altă variantă a explicaţiei date de Frege. Dedekind însuşi a remarcat această corespondenţă cînd a luat cunoştinţă, pentru prima oară, de *Grundlagen* al lui Frege, cam după un an de la publicarea propriei sale cărţi, şi a atras atenţia asupra acestei corespondenţe în prefaţa la a doua ediţie a cărţii sale (1893). în prefaţa la ediţia a treia (1911), Dedekind a spus că deşi îşi menţinea punctul său de vedere iniţial, după care aritmetica, algebra şi analiza sînt părţi ale logicii, el trebuie să recunoască obiecţiilor ridicate între 1893 şi 1903 o anumită forţă. Aceasta înseamnă, probabil, că el făcea front comun cu Cantor şi Frege, a căror operă fusese criticată pe acel timp.

Diferenţa fundamentală între opera lui Frege şi cea a lui Dedekind este că primul, spre deosebire de al doilea, pune în conexiune numerele cu extensiunile conceptelor. Deşi Dedekind pleca de la consideraţii generale despre sisteme sau mulţimi, el termina cu o teorie pur ordinală a numerelor. Frege era la fel de interesat de ordonarea obiectelor în şirul numerelor, dar considera că această ordonare nu poate fi explicată prin definiţia pe care o dădea pentru *„n* în şirul numerelor naturale urmează imediat lui *m"*. Nu este clar dacă Dedekind dorea să respingă acea parte a teoriei lui Frege care ieşea din cadrul propriei sale teorii, dar avem pasaje care sugerează că el nu considera potrivit ca teoria numerelor ordinale să se bazeze pe o teorie a numerelor cardinale. Atunci cînd declară pentru prima dată că elementele sistemului său pot fi numite numere, el scrie :

„Dacă în considerarea unui sistem simplu infinit N ordonat de o proiecţie 9 faceu cu totul abstracţie de natura specială a elementelor, reţinînd numai caracterul lor distinct şi dacă concepem numai relaţiile în

++++++++++++++++++++++++ *Ibidem,* § 4, 59 — 60 şi § 6, 80.

[e!] *Was sind und was sollen die Zahlen* ?, § 6, 73.

[63] Ibid., § 10, 134.

care proiecţia ordonatoare 9 le pune între ele, atunc aceste elemente se numesc *numere naturale* sau *numere ordinale* sau pur şi simplu *numere* iar elementul de bază 1 se numeşte *numărul de bază* al *şirului numerelor.* Avînd în veder această abstracţie sau eliberând elementele de orice alt conţinut, putem caracteriza î mod corect numerele ca o creaţie liberă a cugetului uman. Relaţiile sau legile deduse nuni; din condiţiile a, p, y, 8 în 71, şi care sînt de aceea întotdeauna aceleaşi în toat sistemele simplu infinite ordonate (Cf. 134), constituie obiectul imediat al *ştiinţei nume rului* sau *aritmeticii''**.*

în ultimul pasaj menţionat aici, el demonstrează că toate sistemei simplu infinite pot fi aplicate unul în celălalt prin proiecţii asemenet iar apoi, referindu-se la pasajul citat mai sus, el continuă cu afirmaţia

„Este clar în acelaşi timp ... că orice enunţ despre numere, adică despre elemente *n* ale sistemului simplu infinit N care este ordonat prin proiecţia <p, adică orice enui în care natura specială a elementelor este trecută cu vederea şi se menţionează num conceptele care provin din ordonarea 9, posedă o valabilitate absolut generală pent orice alt sistem simplu infinit Q ordonat de o proiecţie 0 şi pentru elementele sale **-J,** că trecerea de la N la fi (care este totodată traducerea unui enunţ aritmetic dintr-un Iii baj intr-altul) are loc prin intermediul proiecţiei . care transformă fiecare eleme *n* din N într-un element v din £1 care este t|i(n). Acest element v poate fi numit al w-lea element din *CI,* şi prin acelaşi semn numărul *n* este la rindul său al n-lea element al şirului numerelor X.”[M]

Aceste afirmaţii sugerează că Dedekind concepe aritmetica drept o ştiinţă al cărei obiect este definit implicit de cele patru condiţii a, Ş, y, 8, luate ca axiome sau postulate, şi el nu este îngrijorat de posibilitatea unor interpretări diverse pentru semnele sale de bază, deoarece consideră că aceasta nu are nici o importanţă pentru matematică. Ce-i drept, el nu face uz de limbajul axiomaticii, dar în fapt el pare să afirme că este absurd să căutăm mai mult decît un sistem de axiome monomorf.[61]

în *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* din 1889, Peano a enunţat nouă axiome pentru aritmetică. Patru din acestea sînt adevăruri despre egalitate, dar celelalte cinci sînt următoarele postulate speciale:

(1) 1 este un număr.
(2) Succesorul oricărui număr este un număr.
(3) Două numere, oricare ar fi ele, nu au acelaşi succesor.
(4) 1 nu este succesorul niciunui număr.
(5) Orice proprietate care revine lui 1 precum şi succesorului oricărui număr care se bucură de această proprietate revine tuturor numerelor.

în versiunile de mai tîrziu ale acestei încercări de caracterizare a şirului numerelor, Peano porneşte, la fel ca

Frege, de la numărul 0 ; dar concepţia sa generală despre număr rămîne în mod constant ordinală, ca şi concepţia lui Dedekind, iar între axiomele sale şi condiţiile formulate de Dedekind se constată o mare similitudine. Astfel, (2) corespunde lui a, (3) corespunde lui 8 iar (4) lui y, în timp ce (1) şi (5) împreună îndeplinesc oficiul lui Ş. Axiomele sînt independente 'ntre ele, aşa cum se poate vedea din considerarea modelelor care satisfac cîte patru axiome dar nu satisfac cele cinci axiome[65], şi se soaţe demonstra printr-o adaptare a raţionamentului lui Dedekind :ă ele formează o mulţime monomorfă.

Pe Peano îl interesa în primul rînd prezentarea clară a rezultatelor natematice, şi tocmai în acest scop, şi nu în vederea unei analize ilosofice, el a şi compus *Notations de logique mathematique* din 1894. §§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ între anii 1895—1908, el a elaborat cinci versiuni succesive ale unui *Formulaire de mathematiques,* folosind de fiecare dată cele cinci axiome (dar cu 0 în locul lui 1) ca fundament al aritmeticii, iar în ultima versiune, unde partea nesimbolică a fost scrisă într-un nou limbaj internaţional, inventat de el însuşi şi numit *Latino sine flexione,* el a introdus axiomele însoţindu-le de remarca:

„Quaestio si nos pote defini N_o significa si nos pote scribe aequalitate de forma
N_o = expressione composito per signos noto, U> D , quod non es facile.
Ergo nos sume tres idea N_o, 0, 4- ut idea primitivo per que nos defini omni symbolo de Arithmetica. Nos determina valore de symbolo non definito per systema de propositio primitivo sequente”*[6].

Primul grup de simboluri la care se referă în acest pasaj îl formează, desigur, semnele pur logice din lucrarea sa *Arithmetices Principia* şi din lucrările ulterioare, în timp ce celelalte trei semnifică „număr”, respectiv „zero” şi „succesor”. Este limpede, aşadar, că la această dată Peano era încă receptiv faţă de proiectul lui Frege, dar considera că se poate merge mai departe fără să se aştepte rezolvarea chestiunii fundamentelor ultime.

Deşi modul lor de exprimare era oarecum vag şi

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ în legătură cu evoluţia concepţiei lui Dedekind, vezi Wang Hao, "The Axiomatisa- on of Arithmetic", *The Journal of Symbolic Logic,* XXII (1957), pp. 145 — 157. Articolul instituie cap. IV, „Axiomatizarea aritmeticii”, din *Studii de logici- matematică,* de 'ang Hao (Editura ştiinţifică, 1972, p. 74 — 86).

[35] G. Peano, *Formulaire de mathtmatiques,* III, p. 44.

extravagant, formaliştii secolului XIX au făcut o propunere interesantă cînd au afirmat că aritmetica trebuie prezentată ca un sistem axiomatizat în care noţiunile caracteristice ale aritmeticii primesc definiţii implicite prin condiţiile formale la care sînt supuse. Fără îndoială, formulările lui Thomae erau nesatisfăcătoare în amănunt, din motivele înfăţişate de Frege, dar se creează impresia că Frege a triumfat prea uşor asupra adversarului său în această controversă; într-adevăr, pe cînd el îşi redacta obsevaţiile, Peano îndeplinise deja programul lui Thomae într-un mod mult mai pregnant. Pe de o parte, sistemul de axiome al lui Peano nu este expus, ca cel al lui Thomae, la acuzaţia că nt garantează toate numerele naturale, întrucît îl putem introduce pe 1 ca succesorul lui 0, pe 2 ca succesorul lui 1, şi aşa mai departe. Pe de altă parte, axiomele lui Peano, împreună cu definiţiile corespun zătoare pentru operaţiile de adunare şi înmulţire sînt suficiente pentru demonstrarea tuturor legilor generale ale numerelor pe car< le-a formulat Thomae. Aşa, de pildă, putem defini adunarea în mo< recursiv prin următoarele două stipulări:

(I) a + 0 = a,

(II) *a n' = (a + «)',* ********** unde *„n"'* este o abreviere pentru „succesorul lui *n",* iar apoi putem demonstra legea de asociativitate pentru adunare după cum urmează.
Demonstrăm mai întîi că

® + fi + 0) = fi + &) + 0.

Demonstraţia este realizată prin aplicarea succesivă a stipulării (I) de mai sus; într-adevăr,

® + fi + 0) = *a + fi* -|- 0)
= *a + b*
= *fi + b)* + 0.

Demonstrăm apoi că dacă

a -f- fi 4- w) = fi 4- 6) 4" *n* trebuie să avem totodată

a + fi + n') = (a + b) -/- n'.

Demonstrăm aceasta aplicînd succesiv (II) şi utilizînd ipoteza; într-adevăr,

a + fi + n') = a 4- fi + «') = *a* 4- fi 4- «)' = 4~

********** *Formulario Mathcmatico,* p. 27.

fi 4- w)]'
= [a 4- *b)* 4- «]' *= (a* 4- *b)* 4- w'.

în sfîrşit, aceste două rezultate, împreună cu a cincea axiomă a lui Peano, duc la concluzia că

® 4- fi 4" [c]) = fi 4- *b)* 4- *c.*

Se pune atunci întrebarea: de ce să nu ne mulţumin cu formularea aritmeticii la Peano şi să nu spunem că ideile sale primitive sînt suficient definite prin axiomele în cadrul cărora ele sînt menţionate?

Dacă această propunere este valabilă, matematicianul nu mai :rebuie să se preocupe de chestiunea metafizică : „ce este un număr ? ” [w]a îndemnul unui coleg filosof sau la îndemnul propriei sale con- tiinţe, el poate răspunde că priveşte axiomele matematice ca pe ilşte definiţii implicite şi că toate cerinţele sale profesionale sînt tiglobate în ansamblul lui Peano. Propunerea nu este totuşi satis- ăcătoare, deoarece nu garantează acea conexiune cu folosirea uzuală numeralelor care este esenţială pentru orice sistem formal demn de se intitula aritmetică. Dacă semnele pentru „număr”, „zero” şi succesor” au numai sensul reclamat de axiomele lui Peano, ele sînt e fapt variabile în care putem substitui orice expresii care trans- >rmă axiomele în enunţuri adevărate. Or, toate axiomele sînt verifi-

cate atunci cînd semnele „O” şi „număr” sînt luate în sensul lor uzual, iar „succesor” este înţeles în accepţia expresiei lui Frege ,.în şirul numerelor naturale a urma imediat după” ; dar, aşa cum a remarcat Peano însuşi, toate axiomele pot fi verificate prin multe alte interpretări[††††††††††††††††††††††††]. Astfel, condiţiile formale sînt satisfăcute cînd punem numeralul „1” pentru „0”, „membru al şirului 1, — > —> —
2 4 8
pentru „număr” şi „jumătate” pentru „succesor”. Pe scurt, ansamblul de axiome al lui Peano, considerat ca o definiţie implicită, oferă numai caracteristicile logice comune ale tuturor progresiilor. în pofida tuturor considerentelor emise de Dedekind şi Peano în apărarea abordării lor, nu ne putem declara pe deplin satisfăcuţi cu o bază a aritmeticii care nu distinge şirul numerelor naturale de orice altă progresie. Pînă şi în cadrul matematicii pure avem prilejul să între-

†††††††††††††††††††††††††† [7] *Formulaire de mathimatiques,* III, p. 44.

buinţăm numeralele în sensul lor normal, ca, de exemplu, atunci cînd spunem: „Există *patru* numere prime mai mici ca 10”.

Dealtfel, acesta nu este singurul motiv pentru a spune că axiomele lui Peano sînt inadecvate în ele înseşi ca fundament al aritmeticii. După cum am văzut, sistemul pe care-l formează este monomorf, dar pentru a-şi merita acest titlu se pare că este esenţial ca cea de-a cincea axiomă să conţină o generalizare asupra tuturor proprietăţilor. O asemenea generalizare echivalează de fapt cu asumarea noţiunii largi de proprietate sau mulţime, folosită de Cantor în cadrul propriei sale teorii a mulţimilor, şi de aceea trebuie privită cu suspiciune de cei ce privesc cu scepticism teoria lui Cantor. Mai mult, după toate aparenţele, ceea ce permite interpretarea axiomelor prin referire la alte progresii decît şirul numerelor naturale este caracterul larg al referirii sale la toate proprietăţile. Dacă vrem să evităm primejdiile unei generalizări excesiv de largi şi să ne fixăm atenţia asupra şirului numerelor ca distinct de orice alte progresii trebuie deci, după cum se pare, să încercăm să înlocuim axioma unică a lui Peano asuprs inducţiei matematice printr-un şir de axiome inductive care operează fiecare în parte, cu o anumită proprietate determinată a numerelor Dar matematicianul norvegian Thoralf Skolem a arătat că pînă ş tu un şir infinit numărabil de atare axiome noul nostru sistem, îi întregul său, trebuie să rămînă polimorf (adică necategoric). Dup cum spune el:

„Şirul numerelor este caracterizat complet . . . prin axiomele lui Peano, dacă privii conceptul „mulţime[1]' sau „funcţie prepoziţională” ca ceva dinainte dat şi avînd semnificaţie independentă de toate principiile de generare sau de toate axiomele. D dacă vrem să ducem la îndeplinire în mod consistent tratarea axiomatică, astfel încît raţionamentul cu mulţimi sau funcţii prepoziţionale să fie şi el axiomatizat, atunci o caracterizare completă sau unică a şirului numerelor este imposibilă.”‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡

Această descoperire este înrudită îndeaproape cu teorema lui Godel asupra incompletabilităţii aritmeticii formale, teoremă la care vom avea prilejul să ne oprim mai tîrziu. Bineînţeles, Frege nu o cunoştea. Dar Frege nu nutrea nici o simpatie pentru abordarea pe bază de postulate, deoarece era convins că regulile de utilizare a expresiilor numerice

---

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ ..tJber die Nicht-charakterisierbarkeit der Zalilenreihe mittels endlich oder abzählbl- ar unendlich vieler Aussagen mit ausschliefllich Zahlvariablen”, *Fundamenta Mathema- :a,* XXIII, (1934), pp. 150-161.

trebuie să derive din definiţiile numerelor şi nu invers. Tocmai această convingere a inspirat eforturile sale de prezentare a aritmeticii ca o extindere a logicii.

VIII

LOGICA GENERALĂ A LUI FREGE

1. *„Begriffsschrift^*

Urmează acum să examinăm acea dezvoltare a logicii prin care Frege spera să-şi ducă la îndeplinire, în mod absolut riguros, programul său; este firesc să trecem în revistă operele sale în ordinea în care au fost scrise, amînînd toate comentariile majore pînă cînd vom avea în faţă întregul tablou.

în prima sa lucrare, *Begriffsschrift,* principala preocupare a lui Frege este construirea unui limbaj formalizat al gîndirii pure, adică a unui sistem de simboluri mai precis decît limbajul obişnuit şi mai bine adaptat în vederea asigurării exactităţii deducţiei; şi aceasta pentru că nu permite decît ceea ce este esenţial, şi anume conţinutul conceptual, ca opus emfazei retorice. în subtitlul cărţii, Frege spune că această nouă scriere trebuie să fie modelată după limbajul aritmeticii, dar la lectură constatăm că asemănarea principală rezidă în întrebuinţarea literelor în scopul exprimării generalităţii. Desigur, nu Frege a fost primul logician care s-a gîndit la acest procedeu; Aristotel l-a aplicat mult timp înaintea inventării algebrei. Dar Frege a fost primul care a arătat amploarea posibilităţilor acestui procedeu; după cum vom vedea de îndată, el distingea în mod net diferitele noţiuni înl legătură cu variabilele care anterior fuseseră confundate. Frege nu a utilizat într-un sens logic special alte semne ale aritmeticii, cum ar fi .,+", deoarece dorea să le păstreze în vederea aplicării lor în sensul matematic normal, alături de noile semne logice. Atunci cînd Schroder i-a obiectat această îndepărtare de la notaţia lui Boole, Frege a replicat că ceea ce urmărea era crearea unei scrieri pentrr analiza raţionamentului matematic şi că de aceea a evitat în moc deliberat adaptarea în stil Boole a simbolismului algebric, oricît d< adecvat ar fi

acesta pentru anumite scopuri limitate§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§.

Primul dintre semnele speciale pe care le introduce este destina să exprime judecata sau asertarea. Semnul are forma

şi est scris la stînga semnului sau complexului de semne în care este da conţinutul judecăţii. în cazul cînd liniuţa verticală de la început este o misă, linia orizontală rămasă se numeşte linia conţinutului şi ea serveşte pentru a arăta că conţinutul exprimat de semnul sau semnele ce urmează este luat în considerare de către autor fără însă a fi afirmat sau negat. De exemplu, dacă „ J-T” este o abreviere a enunţului „Polii magnetici opuşi se atrag între ei”, „ —T” va reda numai gîndul atracţiei reciproce între polii magnetici opuşi, fără o judecată asupra corectitudinii acestui gînd. Frege ne spune că, dacă vrem, putem citi linia orizontală ca şi cum ar însemna „propoziţia că” şi subliniază că conţinutul a ceea ce urmează acestei linii trebuie să fie întotdeauna un conţinut de judecată permis, şi nu o simplă idee, cum este reprezentarea unei case. în exemplul de mai sus, majuscula grecească ,, T” constituie o abreviere a exprimării unui asemenea conţinut şi avem aici un exemplu al modului în care Frege utilizează litere în scopuri logice. Literele mari greceşti trebuie înţelese întotdeauna ca abrevieri, dar uneori ele pot fi introduse fără nici o explicaţie specială, iar atunci cititorul le poate atribui orice sens preferă, cu singura condiţie ca să păstreze acelaşi sens în tot contextul în care figurează litera respectivă. De dragul clarităţii, vom utiliza numai majuscule greceşti neasemănătoare literelor latine, deşi Frege însuşi nu procedează întotdeauna astfel în prima sa lucrare.

Logicienii anteriori considerau că nu poate exista o reprezentare adecvată a judecăţii fără să distingem între subiect şi predicat; Frege respinge însă această dogmă. într-adevăr, poate exista o diferenţă retorică între „Grecii i-au învins pe perşi” şi „Perşii au fost învinşi de greci” ; dar *conţinutul conceptual* al celor două enunţuri este acelaşi, deoarece fiecare poate fi substituit în locul celuilalt ca premisă fără să afecteze validitatea raţionamentului nostru, iar aceasta este tot ce trebuie să avem în vedere dacă încercăm să construim un limbaj destinat scopului urmărit

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ ,,t)ber den Zweck der Begriffsschrift”, *Sitzungsberichte dcr Jenaischen Gesellscha fur Medicin und Naiurwissenschaft,* 1882, pp. 1 — 10.

de Frege. Să ne imaginăm o variantă a limbajului obişnuit în care afirmaţia că Arhimede a pierit cu prilejul cuceririi Syracusei ar fi exprimată prin propoziţia: „Moartea violentă a lui Arhimede cu prilejul cuceririi Syracusei este un fapt” ; cu alte cuvinte un limbaj în care întregul conţinut al unei judecăţi este exprimat printr-o expresie subiect. Atunci toate enunţurile vor avea unul şi acelaşi predicat, şi anume „este un fapt’.’; dar această expresie nu va fi la fel ca expresiile obişnuite pentru predicate, deoarece nu va face altceva decît să prezinte conţinutul subiect în forma unei judecăţi. Frege ne spune că limbajul său simbolic este de ace~t fel [şi spune că dacă persistăm să căutăm predicate, va trebui să luăm simbolul „|-” ca semnul de predicat comun tuturor judecăţilor. Acest mod de a vorbi îl angajează, desigur, la punctul de vedere că distincţia dintre universal şi particular, precum şi ideea de negaţie, se aplică la conţinutul posibil al judecăţii şi nu la judecăţile ca atare. deoarece ele sînt legate de relaţiile de implicaţie necesară, inconsistenţă etc., relaţii care pot să aibă loc între conţinuturi neasertate. Pe de altă parte, el spune că distincţia pe care o fac logicienii de obicei între judecăţi categorice, ipotetice şi disjunctive este pur gramaticală, aşa cum va reieşi din dezvoltarea ulterioară a sistemului său ; şi Frege susţine că distincţiile de modalitate pot fi ignorate deoarece se referă la temeiuri şi nu la conţinuturi de judecată. Atunci cînd spunem că ceva trebuie să aibă loc, indicăm faptul că cunoaştem un adevăr general din care ceea ce trebuie să aibă loc poate fi dedus ; iar atunci cînd spunem că ceva e posibil să aibă loc, noi indicăm că nu cunoaştem legi din care ar rezulta negaţia propoziţiei (afară doar dacă nu utilizăm limbajul posibilităţii pentru exprimarea a ceea ce se numeşte de obicei o judecată afirmativă particulară, ca atunci cînd spunem ,,O tumoare poate duce la deces”, vrînd să spunem prin aceasta că unele tumori sînt fatale).

După ce respinge astfel analiza tradiţională a judecăţilor. Frege introduce o expresie pentru complexă că T nu trebuie să fie negat cînd A este afirmat. Evident, conţinutul ~$_{es}$te ceea ce ne-am obişnuit să numim o condiţională filoniană cu A ca antecedent şi T în calitate de consecvent. Frege nu ne spune nimic despre istoricul acestei noţiuni, şi s-ar putea să nu fi ştiut de aplicarea ei de către unii logicieni anteriori, dar el o

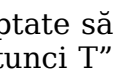
explică exact la fel cum o explică Filon, adică distingînd cele patru posibilităţi diferite:

(Z) T afirmat, A afirmat,
(II) r afirmat, A negat,
(III) T negat, A afirmat,
(IV) T negat, A negat,

şi spunînd că noul semn complex reprezintă judecata că a treia posibilitate nu se realizează, dar că una din celelalte trei se realizează. Pe de altă parte, spre deosebire de Filon, el recunoaşte că un asemenea semn nu exprimă întreaga forţă a cuvîntului „dacă". Căci, deşi utilii zează denumirea „linia condiţiei" pentru o linie verticală care uneştt orizontalele, el spune că această linie nu poate fi redată propriu-zis prin „dacă", cu excepţia cazului cînd T este conectat cu A conforn unei legi astfel încît să putem face judecata |-j— r fără să ştim daci

***—A**

r şi A trebuie afirmate sau negate separat. Frege merge prea departe cînd susţine că conexiunea trebuie să fie cauzală; într-adevăr, noi putem spune, desigur : ‚Dacă acest teren este un triunghi dreptunghic, pătratul construit pe ipotenuză este egal cu suma pătratelor construite

pe celelalte două laturi". Dar Frege are dreptate să susţină că nu este echivalent cu „Dacă A, atunci T"  cînd este asertat numai pentru că se ştie că T este adevărat sau se ştie că A este fals.

Interesul manifestat de Frege pentru condiţionala filoniană este legat de interesul său pentru rigoarea deductivă. El observă că, luate

împreună, cele două judecăţi şi (—A implică în mod necesar

judecata l-r, deoarece exclude cea de-a treia dintre cele

patru posibilităţi enumerate mai sus, în timp ce |—A exclude a doua şi a patra posibilitate ; el propune să reducem orice inferenţă la această unică schemă simplă: *modus ponens* din logica tradiţională sau detaşarea, cum este numită de unii logicieni moderni. Dacă *n* este

numărul unei judecăţi h-? în sistemul său deductiv, el

* **A**

succint inferenţa scriind:

$$(n): \frac{\vdash \Delta''}{\vdash \Gamma}$$

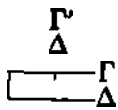
Majoritatea logicienilor anteriori au prezentat un şir de scheme de inferenţă, şi Frege nu contestă faptul că în practica obişnuită oamenii întrebuinţează numeroase scheme diferite; dar el spune că dacă admitem mai mult decît o singură schemă, atunci nu avem un motiv >ă ne oprim la un anumit număr dat. Dar creşterea numărului reguli- or sporeşte pericolul comiterii unor erori în aplicarea lor, în timp :e scăderea acestui număr ne sporeşte perspicacitatea şi astfel prezintă garanţii mai mari. De aceea, este de dorit să aplicăm o singură formă e inferenţă, în caz că este posibil; iar acest lucru este posibil cu con- iţia să avem la dispoziţie un număr suficient de formule logice, în ve- erea utilizării lor ca premise. în cele ce urmează, vom avea prilejul să onsemnăm formulele alese de Frege în acest scop şi atunci va fi mai şor să înţelegem ce presupune pretenţia sa de a reduce toate in- îrenţele la o singură schemă; aci însă putem observa că, de fapt, L utilizează şi o procedură de substituţie, pe lîngă cea a detaşării. El

însuşi admite aceasta; şi după ce susţine că aplică un singur fel de inferenţe, el adaugă: ,,— cel puţin, în toate acele cazuri cînd o judecată nouă este dedusă din mai mult decît una singură".

Negaţia va fi exprimată printr-o liniuţă verticală ataşată părţii de jos a liniei conţinutului, ca în semnul complex [1]»·| , p »• care înseamnă : ,,Nu este cazul că T". Dar pentru ca linia conţinutului să-şi poată îndeplini rolul arătat mai sus, „ i" poate fi înţeles ca o contopire a semnelor „ ", „ i " şi „ ----------". Combinîndliniile conţinutului, condiţiei şi negaţiei în diverse moduri, putem exprima acum diverse alte noţiuni logice. Astfel, —>—t—T'* înseamnă: „Cazul în care negaţia lui T va fi negată iar A afirmat nu are loc" sau „Nu este cazul că atît T cît şi A". Iar negaţia întregului conţinut al acestei judecăţi furnizează

, r r " , care înseamnă „T şi A". Cînd spunem „T însă „A", adăugăm simplei conjuncţii sugestia că A nu este aşteptată, dar aceasta este ceva pentru care Frege nu susţine că ar dispune de mijloace de exprimare în simbolismul său. Pentru „T sau A", unde „sau" are sensul inclusiv favorizat de Frege, avem '*[:—i—T" , care în

seamnă literal: „Cazul în care T trebuie negat, iar negaţia lui A afirmată nu apare" ; negaţia întregului conţinut al acestei judecăţi dă la rîndul ei f " care înseamnă „Nici T, nici A". Pentru „I sau A" în sensul exclusiv (redat uneori prin „ori T, ori A") trebuit să legăm conţinuturile primului şi celui de-al treilea dintre aceşt compuşi noi, şi rezultatul este expresia :



Aşa cum subliniază Frege, fiecare dintre judecăţile exprimate î simbolismul său cu linii selectează una sau mai multe dintre ce patru posibilităţi reprezentate în tabelul de mai sus şi respinge j

celelalte. Ultima judecată, de exemplu, lasă deschise cele două posibili- ăţi:

(II) T afirmat, A negat,
(III) T negat, A afirmat.

Dacă dorim să ajungem la ceea ce este esenţial pentru conţinutul oricărei atare judecăţi, trebuie să luăm în considerare această selectare dintre posibilităţi, şi nu vreo formă specială a expresiei. Astfel, dacă am fi plecat cu un semn de bază pentru conjuncţie (adică pentru selectarea primei dintre posibilităţile reprezentate în tabela noastră şi respingerea tuturor celorlalte), am fi putut defini condiţionala lui Filon pentru 1 şi T ca negaţia conjuncţiei lui A cu negaţia lui T. în unele privinţe, iceasta ar fi fost mai natural, deoarece modul nostru uzual de folosire i lui „şi" corespunde mai îndeaproape noţiunii de conjuncţie decît corespunde modul nostru uzual de folosire a lui „dacă" noţiunii de condiţională filoniană. Frege explică însă că s-a decis să înceapă cu [inia condiţiei deoarece ea simplifică formularea inferenţelor. Cu alte cuvinte, el crede că avem un cîştig de eleganţă şi claritate atunci cînd noţiunea presupusă în unica lui regulă de inferenţă este reprezentată printrrun semn unic şi în aşa fel încît consecventul poate fi distins mediat de antecedent. în propria lui schemă, inferenţa este indicată pur şi simplu prin eliminarea clauzei inferioare dintr-un complex
condiţional, adică prin trecerea la |-r.

Frege introduce acum un simbol pentru identitatea de conţinut. .,uînd literele „T" şi „A" ca denumiri de orice gen, adică nu neapărat emne propoziţionale, el stipulează că „|—(T= A)" va însemna: Numele T şi numele A au acelaşi conţinut conceptual, astfel încît [1] poate fi întotdeauna înlocuit prin A şi reciproc". Trebuie observat Ipotrivit acestei explicaţii, judecata |—(T = A) se referă la nume.

ge însuşi expune acest lucru într-o manieră curioasă, spunînd că nele legate prin noul său simbol nu sînt simpli înlocuitori pentru ţinuturile lor, ci apar *in propria persona.* El continuă, argumen- 1 că se cere un simbol al identităţii de conţinut, deoarece unul şi laşi conţinut poate fi redat sau determinat în moduri deosebite, d se întîmplă aceasta, existenţa unor nume diferite pentru acelaşi ţinut nu este un lucru banal, ci o trăsătură esenţială a limbajului tru

fără de care nu am fi în stare să facem unele judecăţi importe de genul celor pe care Kant le numea sintetice. Am putea ilustra umentarea sa printr-un exemplu pe care el însuşi l-a folosit în lizele de mai tîrziu. Potrivit modului său de a vorbi la acea dată, iceafărul de ziuă" şi „luceafărul de seară" sînt două denumiri ale aceluiaşi conţinut; dar cînd spunem „Luceafărul de ziuă = Lucea farul de seară", dăm o informaţie importantă, întrucît cele dou; nume corespund unor moduri deosebite de determinare a conţinu tului. Un alt motiv pentru introducerea acestui simbol este acela ci avem nevoie de el pentru formularea definiţiilor.

Următoarea noţiune din *Begriffsschrift* este cea căreia Frege î acordă cea mai mare importanţă în prefaţa sa, şi el o explică dupi cum urmează:

„Dacă un simbol simplu sau compus apare, în unul sau mai multe locuri, într-o expresi al cărei conţinut nu este neapărat un conţinut posibil de judecată şi dacă ne închipuin acest simbol ca înlocuibil, în unul sau mai multe locuri în care apare, prin alt simbol acelaşi de fiecare dată, atunci acea parte a expresiei care se dovedeşte invariantă 1 această înlocuire se numeşte funcţie, iar partea înlocuibilă argumentul''.

De exemplu, dacă limbajul nostru conţine expresia „faptul că bioxi dul de carbon este mai greu decît hidrogenul" şi privim această expre sie ca şi cum cuvîntul „hidrogen" ar putea fi înlocuit prin cuvîntu „oxigen" pentru a alcătui o expresie de acelaşi tip general ca şi prima vom trata atunci „hidrogen" ca un argument al funcţiei: „faptul c; bioxidul de carbon este mai greu decît. .Acest mod de exprimări ne obligă, desigur, să spunem că „oxigen" este un alt argument a aceleiaşi funcţii. Dar putem tot atît de bine să considerăm „bioxic de carbon" ca parte înlocuibilă din expresia noastră iniţială, şi atunc vom ajunge să vorbim despre funcţia „faptul că este mai greu decîl
hidrogenul". Sau, mai putem privi atît „bioxid de carbon" cît şi „hidrogen" ca înlocuibile, vorbind atunci despre „faptul că ----------este mai grev
decît..." ca despre o funcţie de două argumente. Dar lucrurile m: se termină aici, deoarece continuînd pe aceeaşi linie, ajungem si recunoaştem posibilitatea unor funcţii cu mai mult de două argumente într-un limbaj natural, un cuvînt sau o expresie întreagă care ocup; locul subiectului într-o propoziţie sînt destinate de obicei să fie consi derate argument, sau cel puţin argumentul principal, dar trebuie s

ne ferim de a crede că orice expresie-subiect ar putea fi considerat un argument. în enunţul „Fiecare întreg pozitiv poate fi reprezer tat ca suma a patru pătrate” avem într-adevăr de-a face, cum voi vedea mai tîrziu, cu funcţia „----------poate fi reprezentat ca suma a patr
pătrate”, adică cu o funcţie pentru care „numărul 20” poate fi cara< terizat ca argument în „numărul 20 este reprezentabil ca sumă a p; tru pătrate”. Dar, după Frege, expresia „fiecare întreg pozitiv spre deosebire de „numărul 20”, nu este un argument posibil al acest funcţii sau al unei alteia, deoarece în propoziţiile în care figureaz această expresie capătă un sens numai datorită contextului, iar lua în sine nu transmite o idee completă.

---

[2] *Bs.*. § 9.

Terminologia fregeeană a funcţiei şi argumentului este împrumutată, desigur, din matematică, la fel ca notaţia funcţională introdusă de Frege. De exemplu, el spune că semnul compus „O (T)” exprimă o funcţie nedeterminată de argumentul „ T”, iar „T(r, A) este o funcţie (nedeterminată mai departe) de cele două argumente „T” şi' „A” luate în această ordine. Dacă presupunem că funcţiile sînt de aşa natură încît completate prin argumente exprimă conţinuturi posibile de judecată, putem citi <h(r)” ca: „T are proprietatea <D”, iar T(T, A)” ca: „T este în relaţia Ÿ cu A”. Pentru Frege, meritul principal al acestui simbolism este că permite exprimarea generalităţii într-un mod mai satisfăcător decît oricare alt mod permis de limbile obişnuite. Dar aceasta este posibil numai cînd simbolul este folosit împreună cu un nou procedeu, pe care logicienii de mai tîrziu l-au numit notaţie cu variabile legate; pentru distingerea rolului jucat de literele sale atunci cînd sînt folosite ca parte integrantă din această notaţie, Frege introduce acum tipul gotic.

I în cadrul expresiei unei judecăţi, în scrierea sa, orice simbol compus >ituat în dreapta semnului asertării poate fi considerat ca o funcţie ie unul din simbolurile care figurează în cadrul său. Să înlocuim acest ;imbol printr-o literă gotică şi să inserăm aceeaşi literă gotică într-o :oncavitate a liniei conţinutului astfel încît să avem, de exemplu.

Atunci, după Frege, „această formulă semnifică judecata că funcţia este un fapt, oricum am

considera argumentul ei”[3]. Sminologia sa conţine desigur o eroare, căci, potrivit explicaţiei care o dăduse anterior, o funcţie este o parte a unei *expresii,* adică a ce nu poate fi un fapt. Acesta nu este dealtfel singurul pasaj *Begriffsschrift* unde Frege pare să confunde simbolurile cu ceea simbolizează acestea. Alte exemple se pot găsi în citatele noastre, trebuie însă să insistăm deocamdată asupra acestui lucru. Fre- arată limpede ce vrea să spună, atunci cînd continuă afirmînd dintr-o judecată ca cea menţionată mai sus putem deduce întot- una un număr de judecăţi cu conţinuturi mai puţin generale, da- omitem concavitatea cu litera ei gotică şi substituim diverse simţiri definite pentru litera gotică dinăuntrul parantezelor. Pe scurt, resia de mai sus este echivalentă cu „Orice lucru este O”, dai este struită astfel încît să se evite pericolul confundării formei sale cu na expresiilor care provin din ea printr-o substituţie.

’rebuie însă observat că în acest context cuvîntul „orice” nu este us nici unei determinări, cu excepţia condiţiei implicite că orice

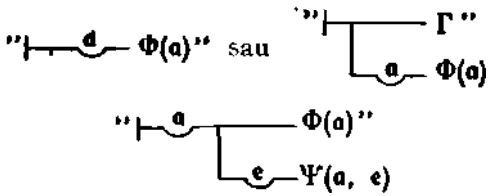
---

Bs., § 11.

substituţie admisibilă în funcţie trebuie să dea o expresie pentru un conţinut posibil de judecată. Dacă dorim să utilizăm noua noastră scriere pentru exprimarea unei judecăţi că ceva de un anumit gen este aşa şi aşa, va trebuie să punem această restricţie în simbolismul care urmează

după concavitate. De exemplu, pentru „Orice vieţuitor este pieritor” trebuie să **”1—<Sr-|- Il(o) ”** tratînd „ **A( )** | ca un semn funcţional compus unic. Această redare înseamnă literal: „Pentru orice a, nu este cazul că a este vieţuitor şi în acelaşi timp nu este pieritor” şi ea indică clar faptul că concavitatea cu literele ei gotice guvernează întreaga expresie ce urmează; dar ea nu garantează semnificaţia existenţială care revine acelor enunţuri din limba obişnuită pe care încercăm să le traducem. Fără îndoială, Frege era conştient de acest din urmă lucru, dar el nu-l menţionează în mod explicit.

Pînă acum, am considerat numai cazurile în care concavitatea cu litera ei gotică vine imediat după linia judecăţii. Dar cuantorul universal, cum a fost el numit de către Peirce şi logicienii de mai tîrziu, poate apărea în alte poziţii, în cadrul expresiei unei judecăţi ca, de exemplu,



atunci cînd scriem :

Aceasta are o mare importanţă, deoarece ne permite să facem nent mărate genuri interesante de enunţuri în noua scriere. Astfel, cîn cuantorul universal este precedat de linia negaţiei, ca în primul no tru exemplu, avem o expresie pentru existenţa a ceva ce nu satisfa< expresia funcţională care urmează, iar pentru afirmarea existenţ a ceva ce satisface o expresie funcţională nu avem de făcut alt cei decît să intercalăm o altă linie a negaţiei între cuantorul

univers" şi expresia funcţională, ca atunci cînd scriem»>⊥ |
(a)”P[en]tfl

„Există cel puţin un filosof”. Aşa cum spunea William de ShyreswocH *„Quidam, non-nullus, non-omnis-non* sociantur”. Dacă domeniul H acţiune al cuantorului universal este limitat la condiţia întregii juiH

căţi, ca în al doilea exemplu al nostru, avem o modalitate de redare a unor enunţuri ca: „Dacă orice este umed, nu putem aprinde focul”, enunţ cu totul deosebit, desigur, de : „Consideraţi un lucru oarecare: dacă acest lucru este umed, nu putem aprinde focul”. Dar cînd un cuantor universal este inclus în domeniul altuia, ca în cel de-al treilea exemplu al nostru, avem un tip de complexitate care n-a fost analizat niciodată în mod amănunţit de către logicienii dinaintea lui Frege, deşi el poate fi găsit în vorbirea obişnuită şi este esenţial pentru limbajul ştiinţific. Pentru a lua exemple ceva mai complicate decît cel citat de Frege,

<>(<>. e)"
1—Ale)
----------K(a)

ar servi pentru redarea enunţului: „Orice pisică se teme de un cîine” iar

. dz-r-*»(<». «)”
Lк(o)
----------A(*)

pentru o redare a enunţului: „Există un cîine de care se teme orice pisică”. Evident, cele două aserţiuni sînt deosebite şi ambele desfid brice încadrare în schema aristotelică. în fapt, complexitatea posibilă a aserţiunilor exprimabile în scrierea lui Frege nu cunoaşte limi- :ă. într-adevăr, deşi Frege nu are decît trei semne de bază ce prezintă mportanţă în această ordine de idei, şi anume linia condiţiei, linia legaţiei şi cuantorul universal, aceste semne se pot combina într-o nfinitate de moduri diferite. în timp ce logicienii de dinaintea lui rnrbeau ca şi cum ar fi posibil să dăm o listă completă a formelor bsolut specifice ale propoziţiilor, Frege oferă o schemă care este 1 acelaşi timp mai simplă ca orice propunere anterioară şi totuşi, rtr-un anumit sens, este inepuizabilă.

Dar posibilitatea includerii unui cuantor în domeniul de acţiune 1 altora impune anumite precauţii în alegerea literelor gotice. Deşi 1 general este legitimă înlocuirea unei litere gotice prin alta în cadrul itregii expresii în care apare, este important ca *deosebirile* de literă i fie păstrate atunci cînd un cuantor este inclus în domeniul de acţiune altuia. Astfel, în exemplele de mai sus, dacă înlocuim

oriunde ”e” n „a” sau „a” prin „e”, rezultatul ar fi sau absurd, sau ceva cu tul diferit de ceea ce urmăream. Cauza acestei restricţii impuse rtăţii noastre de alegere este lesne de înţeles. Dacă un semn func- nal are mai multe locuri de argumente ce urmează să fie completate acelaşi fel, este important să indicăm acest fapt într-un mod oarecare, iar metoda evidentă, adoptată acum în mod universal, rezidă în marcarea acestor locuri, şi numai a acestora, prin aceeaşi literă. într-adevăr, pe baza acestei convenţii este limpede că cele două locuri de argumente dintr-un semn cum este „a se teme de a” trebuie completate prin acelaşi argument, dacă în genere ele sînt completate, deşi cele două locuri din „a se teme de e” nu trebuie neapărat completate prin argumente diferite. Prin urmare, atunci cînd un cuantor apare în domeniul de acţiune al altuia şi există putinţa unei confuzii, sîntem obligaţi să ţinem seama de sus-menţionata distincţie între litere.

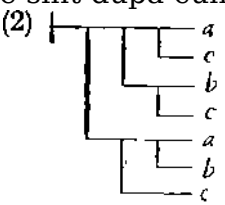
Deşi bogăţia sistemului lui Frege se datorează în mare măsură faptului că cuantorul său universal nu este obligat să apară întotdeauna imediat după linia judecăţii, cazurile în care el apare totuşi în acest mod sînt deosebit de importante, deoarece numai ele admit substituţia. Ca să facem o paralelă cu limbajul obişnuit de care ne-am ocupat deja, un om care afirmă: „Dacă orice este umed, noi nu putem aprinde focul”, nu acceptă prin aceasta toate afirmaţiile de felul acesteia: „Dacă iarba este umedă, noi nu putem aprinde focul”. într-adevăr, oricare din aceste din urmă afirmaţii pot fi false, deşi ceea ce afirma persoana respectivă era adevărat. Pentru marcarea cazurilor care admit substituţii şi în acelaşi timp pentru simplificarea notaţiei sale] Frege introduce un al doilea mod de exprimare a universalităţii, şi anume prin intermediul unei litere cursive care nu este precedată de un cuantor. De exemplu, în loc de —®(ª)” putem scrie: O(a)”l

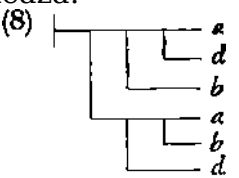
oriunde aceasta este convenabil; iar de la această din urmă formull ne putem înapoia, după plac, la prima, dar cînd înlocuim o literl cursivă printr-una gotică trebuie să fim siguri că litera gotică aleasl nu figurează deja în nici o parte a enunţului nostru. Această măsuJ de precauţie este necesară deoarece noul nostru cuantor va fi astffl situat încît să includă în domeniul său de acţiune orice alţi cuantoB care pot figura în cadrul expresiei. Esenţial este faptul că atunci

cînB universalitatea se exprimă într-o scriere de genul celei a lui FregH prin litere fără cuantori (adică se exprimă prin variabile libere, cuB sînt ele numite în terminologia logicienilor moderni), fiecare literă al ca domeniu propriu de acţiune întreaga expresie în cadrul căreia apa™ Notaţia datează cel puţin de pe vremea lui Aristotel, dar Frege a fol primul logician care a analizat-o cu grijă şi şi-a dat seama că pentB exprimarea universalităţii într-un domeniu de acţiune limitat, <H de exemplu, după un semn al negaţiei, este necesar un alt procedai

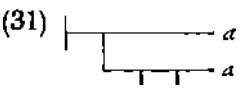
După ce a explicat simbolismul său, Frege trece la formulai" unor teze logice. Există, spune el, unele principii care nu potH

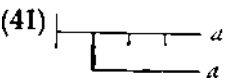
exprimate în scrierea lui, deoarece sînt presupuse de această scriere. Este vorba de regulile de întrebuinţare a semnelor şi de regulile de inferenţă. Există însă principii ale gîndului pur care pot fi exprimate în scrierea sa, şi el îşi propune să dea unele exemple şi să indice conexiunile lor. Cu alte cuvinte, el vrea să arate, în linii mari, cum logica poate fi prezentată ca un sistem deductiv, iar în acest scop el încearcă să găsească unele principii logice care, luate împreună, posedă forţa tuturor celorlalte principii. După cum s-ar aştepta orice cunoscător al istoricului axiomatizării geometriei, Frege descoperă că sînt posibile diverse aranjamente; el optează însă în favoarea unei scheme care conţine 9 axiome, toate foarte simple şi evidente. Primele trei privesc numai noţiunea exprimată prin linia condiţiei, iar următoarele trei introduc noţiunea de negaţie. Două axiome privesc identitatea conţinutului, iar una priveşte universalitatea exprimată printr-o literă gotică într-o concavitate. Formulate în scrierea sa şi prevăzute cu numerele pe care le au în sistemul său, axiomele sînt după cum urmează:





1(28) 1—





;52) (54)

în accepţiile termenilor „primar” şi „general”, care au fost explicate i adoptate în secţiunile anterioare, primele şase formule aparţin ogicii primare, iar a noua este o adăugare cerută de logica generală, >e cînd a şaptea şi a opta aparţin unei teorii şi mai extinse, teoria dentităţii.

Vom constata că toate axiomele sînt formulate prin intermediul terelor cursive (adică al variabilelor libere).

Potrivit explicaţiilor date de Frege, acest procedeu este o simplă abreviere a exprimării prin intermediul literelor gotice şi al cuantorilor universali, şi trebuie presupus că Frege considera acest procedeu ca adecvat în cazul de faţă, deoarece ar facilita substituţia. Dar aceasta nu poate constitui o explicaţie suficientă. într-adevăr, dacă literele gotice ar îi întrebuinţate pretutindeni, am pierde diferenţa interesantă şi importantă dintre primele şase axiome, care, în forma lor prezentă, nu presupun cuantificarea universală, şi a noua axiomă, care presupune această cuantificare. Cu alte cuvinte, logica primară nu ar mai apărea ca o parte proprie independentă a logicii generale, iar a noua axiomă ar înceta să deţină statutul aparte de care se bucură acum. Asupra acestei chestiuni vom mai reveni. în prezent este de ajuns să notăm faptul că în demonstrarea teoremelor pe baza axiomelor sale, Frege are nevoie de un principiu de substituţie, care vine să se adauge principiului detaşării, pe care Frege preferă să-l considere ca unica sa regulă de inferenţă. Dealtfel, aceste două reguli nu sînt singurele pe care le întrebuinţează. într-adevăr, afirmaţia sa că ne putem întoarce după plac de la o literă cursivă la o literă gotică cu un cuantor echivalează de fapt cu o a treia regulă de inferenţă. în cursul explicării utilizării literelor cursive, Frege introduce şi o a patra regulă, aceea că din

0(a) putem deduce |—i—<D(a) dacă „T" este o abreviere

r **[1]-------r** a unei expresii în care *„a"* nu apare iar *„a"* ocupă numai poziţii de argument în versiunea completă a lui ,,<h(a)". ********** împreună cu aceste patru reguli, axiomele sale constituie într-adevăr un ansamblu complet, în sensul tehnic al acestei expresii, deşi suficienţa lor nu a putut fi demonstrată pe vremea lui Frege.

Scrierea lui Frege prezintă avantajele pe care el le revendică, şi în special acela că facilitează inferenţele prin detaşare; dar ea ocupă un spaţiu întins şi este greu de tipărit. Pentru a ilustra o deducţie îr sistemul său, vom introduce deci în locul acestei scrieri simbolismul lu Peano, dar, pentru a face traducerea cît mai uşoară cu putinţă, von menţine notaţia sa literală şi vom lua un exemplu care nu necesită decî' un singur semn nou, şi anume o potcoavă pusă între antecedent şi con secvent, în vederea desemnării unei

---

********** *Bs.,* § 11.

legături filoniene. Exemplu prezintă un interes special deoarece arată în mod izbitor complexi tatea la care putem ajunge pornind de la lucruri simple. Pornind d la primele două axiome ale lui Frege ca premise, vom deduce a trei axiomă, demonstrînd astfel în treacăt că sistemul său poate fi simpli ficat. în cele ce urmează, toate propoziţiile de la [3] la [8] inclusiv au fost stabilite de către Frege însuşi, dar restul demonstraţiei se datorează lui Lukasiewicz[5], iar numerotaţia ne aparţine. Pentru abrevierea unor asemenea demonstraţii, Frege şi succesorii săi au introdus diverse procedee, dar pentru facilitarea înţelegerii vom formula fiecare pas în mod complet, împreună cu justificarea sa. Astfel, referirea de după [3] indică faptul că [3] este dedus din [1] prin substituirea expresiei din faţa barei verticale pentru litera care stă după această bară, iar referirea de după [4] indică faptul că formula se deduce din [3] şi [2] prin detaşare, adică *modus ponens.*

[1] « = (â = «) Axiomă.

[2] [c => (6 => a)] => [(c *b)* => (c *=> a)]* Axiomă.

[3] {[c => *(b =>* a)] => [(c => *b)* => (c => a)]} => ((5 = *a)* =>
O {[c => *(b* = a)] => [(c o 6) o (c O a)]})
Din [1]: [c => *(b =>* a)] => [(c => *b)* => (c => a)]/a; *b => a/b.*

[4] *(b = a)* => {[c *= (b =>* a)] => [(c => *b)* => (c => a)]}
Din [3] şi [2],

[5] ((& => a) => {[c =>(&=> a)] =3 [(c *b)* => *(c :=>* a)]}) *=> ({(b => a) => [c => (b => a)]} => {(b a) =>* [(c z> 5) o (c => «)]}) Din [2] : Z> => a/c; c (6 => *a)/b*; (c => 6) => (c => *a)/a.*

[6] {(& => *a)* => [c => *(b =•* a)]} => {(& => *a)* => [(c => *b)* => (c => a)]} Din [5] şi [4],

[7] (6 => a) [c => (6 => a)] Din [1]: *b* => «/a; *c/b.*

[8] *(b* => a) => [(c t) □ (c = «)] Din [6] şi [7].

[9] {(6*=>a)* => [(c => *b)* => *(c* => a)]} => {[(6 *a)* =>(c => &)] =>
=>[(5 a) z> (c => a)]} Din[2] : *b => ajc; c => b/b; c* => «/a.

[10] [(&=>*a)* (c 6)]=>[(5 => a) => *(c a)]* Din [9] şi [8],

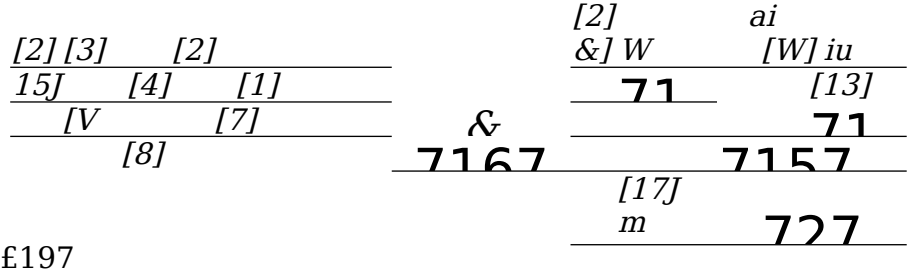
[11] {[(c=*b)* a] => [6 o (c =5&)]} => {[(c *b)* => *a] => (b =>*a)}
Din [10]: *c => b/b; b/c.*

[12] *[a =>* «)]=> {c *=> [a=>* (Z>=> a)]} Din [1]: *a => (b =>a)/a; c/b.*
13] *c => [a => (b => a)]* Din [12] şi [1].
14] [(c *=> b)=> a] =>* [6=> (c=> d)] Din [13] : (c => ft) *=> a/c; b/a;clb.*
45] [(c => *b) o a]* o *(b => a)* Din [11] şi [14],
16] {[(c *=> b) => a] (b* => a)} => ({d => [(c *=> b) => a]} =>
=> [d => (b a)])
Din [8] : (c => *b) => a/b; b => afa*; d/c.
17] *{d* [(c =>&)=> «]} o |_*d = (b =>* a)] Din [16] şi [15],
18] {[c => *(b* => a)] => [(c => *b)* => (c => a)]}
{[c => *(b* => a)] =>
o [6 z> (c a)]) Din [17]: *c=> (b => a)/d; c* => a/*a.*

• „Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis,* V (1936), pp. 111—131, în special 127. (A se vedea *Din istoria logicii propoziţiilor,* în *Logică si filozofie,* Ed. politică,. 66, p. 119-143).

[19] [c =>(&=>«)] => [6 => (c => a)] Din [18] şi [2],
[20] *[d => (b => a)] =■ [b => (d => a)]* Din [19]: *djc.*

Ultimul pas este desigur o modificare banală, care nu are alt scop decît restaurarea notaţiilor pe care Frege le utilizase în formularea celei de-a treia axiome a sa. Dar descoperirea substituţiilor care permit ceilalţi paşi nu este cîtuşi de puţin o realizare banală. Utilizînd linii orizontale pentru indicarea deducţiilor, indiferent dacă este vorba de deducţii din una sau din două premise, putem reprezenta partea fre- geeană a demonstraţiei prin prima dintre următoarele figuri, iar continuarea prin a doua:



£197
[2QJ

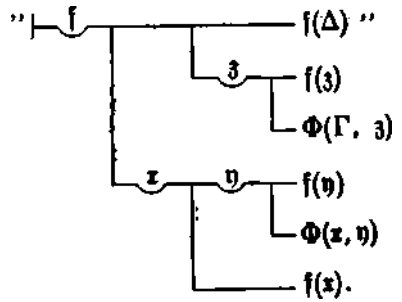
Pînă aici Frege reuşise să-şi dezvolte sistemul fără să recurgă la vreo definiţie abreviativă, exceptînd aceea prin care sînt introduse litere cursive. Dar în a treia parte a lucrării sale, el recunoaşte necesitatea practică a utilizării unor definiţii şi spune că ele trebuie date în forma „||—r= A", noua expresie urmînd în fiecare caz după semnul identităţii. Scopul celor două linii verticale de la început este să arate clar că definiţiile nu sînt judecăţi, ci convenţii despre simbolism Pentru ceea ce urmărim acum nu este însă necesar să considerăm îr mod amănunţit a treia parte din *Begriffsschrift.* Frege intenţionează aici să arate în mod preliminar modul în care scrierea sa poate fi uti lizată în vederea formulării exacte a noţiunilor cerute de matematică şi el alege ca exemplu teoria generală a şirurilor. Exemplul este inte resant deoarece, aşa cum am văzut în capitolul precedent, inducţi matematică depinde de ordonarea în şir a numerelor naturale, ia această ordonare nu poate fi explicată fără teoria relaţiilor, pe cai Frege a încorporat-o pentru prima dată în mod satisfăcător în logica

Pentru orice relaţie $ putem defini o altă relaţie O' astfel încît I este în relaţia *C*>' faţă de A dacă şi numai dacă T este în relaţia I faţă de A sau faţă de ceva care este în relaţia <5 faţă de A, sau faţă **<9** ceva care este în relaţia $ faţă de ceva care este în relaţia O faţă de A sau... etc. în limbajul logicienilor de mai tîrziu, se spune că O' este *ancestralul propriu* al lui O, deoarece dacă O este relaţia de la părinte la copil, <t' este relaţia de la strămoş la urmaş. Frege însuşi nu utilizează această terminologie, dar exprimă relaţia derivativă spunînd: „A urmează lui T în şirul C>", iar problema pe care şi-o pune este de a defini relaţia derivativă printr-o expresie finită, adică fără să facă uz de idiomul „etcetera", care presupune la rîndul său înţelegerea unei ordini de şir. Frege ajunge la rezultatul dorit, spunînd că „A urmează lui r în şirul O" înseamnă acelaşi lucru ca : „A posedă orice proprietate care aparţine (I) oricărui obiect faţă de care orice posesor al proprietăţii este în relaţia O şi (II) oricărui obiect faţă de care T este în aceeaşi relaţie O".

Cele două condiţii menţionate în această definiţie nu sînt numerotate, cum se întîmplă în versiunile ulterioare (inclusiv în versiunea pe care am utilizat-o în capitolul precedent), dar este clar că orice proprietate care satisface ambele condiţii trebuie să revină oricărui obiect faţă de care T se raportează prin ancestralul propriu al relaţiei <I>. într-adevăr, a doua

condiţie reclamă ca proprietatea să revină succesorilor imediaţi ai lui T, iar prima condiţie reclamă ca să fie transmisă de la toţi succesorii lui T la succesorii lor imediaţi sau, cum spune însuşi Frege, reclamă ca ea să fie ereditară în şir. Definiţia conduce deci la identificarea succesorilor lui T, în cadrul şirului O, prin aceea că aceştia posedă *toate* proprietăţile care sînt ereditare în şirul începînd de la T. Nu încape îndoială că pot exista unele proprietăţi care sînt ereditare într-un şir şi totuşi aparţin şi unor obiecte din afara şirului, după cum un nas lung poate fi ereditar într-o familie, laparţinînd totuşi şi unor persoane din afara familiei. Am văzut însă că aceasta nu poate fi adevărat despre *toate* proprietăţile ereditare, deoarece există cel puţin o asemenea proprietate, şi anume aceea de a fi succesor într-un şir, care aparţine numai membrilor şirului. Trebuie observat însă că definiţia lui Frege acoperă numai succesorii lui T în cadrul şirului 0. Dacă vrem să utilizăm expresia „şir <I>" astfel încît să includem aici pe însuşi T, trebuie să definim un membru ca un obiect care este sau identic cu T sau este succesor al lui T în şirul <I>. Uneori, cuvîntul „ancestral" este utilizat pentru relaţia în care T se află faţă de toţi membrii, inclusiv faţă de sine, şi tocmai din acest motiv vorbim, în conexiune cu teoria lui Frege, despre ancestralul *bropriu.*

Exprimat în mod complet în scrierea lui Frege, adică fără să se facă uz de abrevierile introduse de Frege în propoziţiile (69) şi (76), un enunţ stipulînd că A urmează lui T în şirul <5 ia forma :



Acesta este un exemplu bun de utilizare a cuantorilor cu

domenii de acţiune diferite, şi el arată totodată modul în care în anumite contexte o funcţie poate fi tratată la rîndul ei ca un argument pentru o funcţie de un ordin mai înalt. într-adevăr, litera gotică „f" corespunde expresiei „fiecare proprietate" în parafraza din limbajul obişnuit. întroducînd notaţia sa pentru cuantificare în prima parte din *Begriffsschrift,* Frege remarcă această posibilitate şi observă totodată că dacă o literă cursivă apare ca un simbol funcţional trebuie să ţinem seamă în măsură cuvenită de acest fapt atunci cînd efectuăm substituţii. Frege nu consideră însă necesară adoptarea unor măsuri speciale pentru asemenea cazuri în formularea axiomelor logicii, din a doua parte a cărţii.

2. *Sens şi referinţă: obiecte şi funcţii*

în *Grundgesetze,* Frege a păstrat toate simbolurile din *Begriffsschrift,* cu excepţia lui „ = ", pe care l-a înlocuit acum prin semnul matematic obişnuit al egalităţii. în sine, modificarea notaţiei nu are importanţă dar ea marchează o schimbare în vederile lui Frege despre semnifi caţie, iar explicaţia acestui fapt va servi ca o introducere nimerita la teoriile sale de mai tîrziu. El însuşi a pornit de aici, cînd a seri: articolul intitulat *Vber Sinn und Bedeutung.*

Pe la începutul cărţii sale *Begriffsschrift,* Frege făcea distincţie într judecată sau aserţiune şi ceva căruia îi spunea conţinut. Frege nu ; specificat exact cum trebuia înţeles acest din urmă cuvînt, dar îi mod evident el consideră conţinutul ca fiind opus nu numai judecăţii ci şi semnelor de exprimare, şi folosea a doua deosebire atunci cîn explica enunţuri ca : „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară". Este evident că această remarcă este cu totul diferită ca tărie de: „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de ziuă" ; şi totuşi, dacă Luceafărul de ziuă este identic în fapt cu Luceafărul de seară, nu putem explica diferenţa dintre cele două enunţuri spunînd că unul conţine o referire la Luceafărul de seară, în timp ce celălalt nu conţine. Aşa cum am văzut, Frege sugera că un enunţ de identitate trebuie să se refere în mod real la expresiile care apar în cele două părţi ale semnului identităţii şi a încercat să facă clar acest lucru spunînd că „ = " urma să fie înţeles ca un simbol pentru identitatea de conţinut între expresii. Mai tîrziu însă, el a ajuns să vadă că această soluţie nu

rezolvă satisfăcător dificultatea. într-adevăr, el şi-a dat seama că dacă enunţul iniţial nu s-ar referi în mod real la planeta Venus, ci la conţinuturile anumitor expresii, el ar aparţine mai curînd filologiei decît astronomiei, ceea ce, evident, nu este cazul, deoarece descoperirea identităţii Luceafărului de ziuă cu Luceafărul de seară a fost realizată prin observaţii şi calcule, şi nu prin reflecţie asupra utilizării cuvintelor. Am putea adăuga că pînă şi în filologie dificultatea ar apare din nou, de îndată ce am încerca să aplicăm soluţia propusă. într-adevăr, a spune că expresia „Luceafărul de ziuă" are acelaşi conţinut cu expresia „Luceafărul de seară", nu este oare echivalent cu a spune: conţinutul expresiei „Luceafărul de ziuă" este identic cu conţinutul expresiei „Luceafărul de seară" ? Şi dacă lucrurile stau astfel, nu trebuie oare să mergem mai departe şi să spunem că enunţul nostru iniţial nu se referă la expresiile „Luceafărul de ziuă" şi „Luceafărul de seară", ci se referă la expresiile „Conţinutul expresiei «Luceafărul dc- ziuă »" şi „Conţinutul expresiei «Luceafărul de seară»" ? Dar nici măcar aceasta nu este suficient; soluţia propusă implică un regres la infinit.

în opera sa de mai tîrziu, Frege încearcă să evite dificultatea prin faptul că renunţă să vorbească despre conţinut şi emite o nouă distincţie între sens *(Sinri)* şi referinţă *(Bedeutung).* Cînd spunem că Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară, descripţiile noastre se referă Ea unul şi acelaşi lucru, dar se referă în moduri diferite, deoarece descrip- iile nu au acelaşi sens. în emiterea enunţului, noi facem uz de cele două descripţii exact în acelaşi mod în care am fi făcut uz de ele în irice alt enunţ astronomic, şi nu avem nevoie de vreun expedient le felul unui nou semn al identităţii, care ar sugera prin însăşi noutatea ;a că vorbim în fapt despre cuvinte şi nu despre lucruri. într-adevăr, semnul identităţii întrebuinţat în matematică are exact semnificaţia cerută. Cînd se afirmă că 2 + 2 = 4, „2 + 2" şi „4" sînt utilitate ambele pentru indicarea unui număr. Aceste expresii sînt într-a- levăr nume proprii ale unui număr, dar nume avînd sensuri diferite. singura deosebire importantă dintre acest enunţ şi exemplul nostru împrumutat din astronomie fiind aceea că în primul caz adevărul afiimaţiei poate fi stabilit *a priori.*

în germana obişnuită, cuvintele pe care le-am tradus prin „sens" şi „referinţă" nu sînt utilizate pentru efectuarea unei

opoziţii, cum intenţionează Frege. *Sinn* are un domeniu de accepţii [tot atît de larg ca şi englezul „sense”, iar *Bedeutung* corespunde aproape exact lui „meaning” (semnificaţie). în multe contexte, preferarea unui termen în locul altuia nu depinde decît de considerente stilistice. Dar verbul simplu *deuten,* din care sînt derivate *bedeuten* şi *Bedeutung,* poate fi întrebuinţat pentru „point” (a indica), cel puţin în sensul metaforic al acestui cuvînt englez, şi Frege pare să fi reţinut această particularitate ca o justificare pentru accepţia tehnică pe care i-o dă lui *bedeuten.* Frege nu explică motivele sale, deoarece nu admite niciodată că accepţia pe care o dă termenului se abate de la germana obişnuită; dar el dezvăluie orientarea gîndirii sale cînd spune într-un loc că, deşi o literă gotică sau cursivă nu *bedeutet* nimic, ea *andeutet* argumentul unei funcţii*. într-adevăr, *andeuten,* care înseamnă „a arăta spre”, este un alt derivat al lui *deuten*; se pare că Frege consideră acest fapt ca avînd o anumită importanţă. Dar, indiferent care au putut fi motivele pentru care utilizează aşa cum am văzut cuvîntul *Bedeutung,* nu încape îndoială că el i-a conferit o semnificaţie specială pe care n-o posedă în germana obişnuită şi de aceea ne este desigur greu să-i găsim o traducere adecvată. Nu putem utiliza cuvîntul „semnificaţie”, deoarece nu este corect să spunem că expresia „Luceafărul de ziuă” are ca semnificaţie unul din corpurile cereşti, deşi putem spune că o persoană care utilizează această expresie înţelege (adică intenţionează) să se refere la unul din corpurile cereşti. Au fost propuse „nominatum”†††††††††††††††††††††††††† ‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ şi „denotatul” (denotation)§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§, fiecare dintre aceşti termeni avînd avantajele sale. într-adevăr, atunci cînd Frege vorbeşte despre *Bedeutung* a unei expresii, el pare gata să susţină că simbolul considerat este un nume sau, în orice caz, o cvasidenumire; şi putem spune, fără îndoială, că expresia „Luceafărul de ziuă” denotă un corpi ceresc. Dar nici una din aceste exprimări nu pare să fie întru totul satisfăcătoare. „Nominatum”, de asemenea, este o expresie evident

---

†††††††††††††††††††††††††† • *Gg.,* I, § 17.

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ R. Carnap, *Meaning and Necessity.* (A se vedea traducerea română — „Semnificaţii şi necesitate”, Editura Dacia, 1972 — Nota trad.).

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ Alonzo Churcli, "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", *Proceeding of the American Academy of Arts and Sciences,* LXXX (1951), pp. 100—112.

artificială, iar „denotation” poate deruta, deoarece a fost utilizat ca termen tehnic de către John Stuart Mill în contrast cu „conno- tation” (conotatul), care nu coincide exact cu distincţia lui Frege dintre *Bedeutung* şi *Sinn.* „Referinţă” nu este nici el un termen absolut satisfăcător, deoarece este cam confuz să vorbim despre un lucru ca despre referinţa unui semn, dar probabil că această traducere nu dă loc la neînţelegeri. Dealtfel, din cînd în cînd putem modifica modul nostru de exprimare. însuşi Frege explică într-un loc distincţia sa, spunînd că un nume propriu (care poate fi un cuvînt sau un semn izolat, sau o combinaţie de cuvinte sau de semne) *exprimă* sensul său, dar *reprezintă* sau *desemnează* referinţa sa.

în întrebuinţarea obişnuită a limbajului pentru emiterea unor enunţuri, punerea unor întrebări, darea unor ordine etc., se presupune că orice semn complet distinct are atît sens, cît şi referinţă. Referinţa este un obiect de o speţă oarecare, dar nu neapărat un obiect perceptibil ; Frege are grijă întotdeauna să combată ideea că nu există nimic în afară de ceea ce poate fi perceput, şi el include în mod expres printre obiectele sale lucruri ca numerele, locurile, momentele şi perioadele de timp. Pe de altă parte, sensul este ceva prin care obiectul poate fi desprins şi propus atenţiei noastre. Sensul nu este o reprezentare, dacă înţelegem prin aceasta o imagine sau ceva specific unui gînditor individual. într-adevăr, orice comunicare depinde de exprimarea unui sens de la un om la altul, iar în împrejurări speciale semnele pot avea un sens public chiar dacă nu au vreo referinţă. Aceasta se întîmplă, de exemplu, atunci cînd cuvintele sînt întrebuinţate într-o povestire. Un romancier ne poate asigura în prefaţa cărţii sale că opera nu conţine nici o referire la o persoană reală, dar, cu toate acestea, noi putem înţelege ceea ce a scris. Ceva similar se întîmplă şi atunci cînd cineva relatează afirmaţiile unei alte persoane fără să atribuie la rîndul său referinţe cuvintelor întrebuinţate de acel altcineva. De exemplu, cineva care a făcut studii clasice poate folosi cuvintele „Zeus” şi „Athena” în mod inteligibil într-o expunere a mitologiei eline, deşi rici el, nici cititorii săi nu cred că au existat persoane ca cele descrise >ub aceste denumiri. Acestea sînt însă cazuri speciale. în vorbirea ibişnuită, se presupune că toate numele au referinţe, iar într-un lim- jaj logic perfect, destinat ştiinţei, fiecare expresie construită pentru i funcţiona ca un nume propriu ar avea în

fapt o referinţă. într-adevăr, ■rorile apar atunci cînd expresiile ce presupun adevărul unor enunţuri xistenţiale sînt folosite fără demonstrarea acelor enunţuri. De exem-)lu, expresia ,,şirul cel mai lent convergent" are un sens, dar nu se efcră la nimic, iar o propoziţie care-l conţine nu reuşeşte, din această auză, să slujească unui scop util. Nu putem susţine nici măcar că el care rosteşte această expresie ar comite un enunţ fals, deoarece presupune nu este totuna cu a aserta.

Pînă aici, teoria lui Frege nu suscită prea multe controverse. Poate 1 unii cititori ar fi surprinşi de întrebuinţarea pe care el o dă expresiei „nume propriu" pentru a cuprinde expresii ca „2 + 2", dar dacă cineva obiectează în această privinţă, el poate substitui „desemnare" pentru „nume propriu", fără să aducă astfel doctrinei vreo modificare esenţială. Situaţia se schimbă atunci cînd Frege merge mai departe şi argumentează că propoziţiile au atît sens cît şi referinţă. într-adevar, aceasta presupune tratarea propoziţiilor ca şi cum ele ar fi nume sau desemnări, ceea ce fără îndoială că este straniu. Frege însuşi recunoaşte că este bizar să vorbim despre referinţa unei propoziţii, dar el argumentează că trebuie să procedăm astfel din următorul motiv. O propoziţie inteligibilă are în mod incontestabil un sens, iar acesta este gîndul pe care îl exprimă, gînd care, desigur, nu este opera subiectivă a gîndirii celui ce vorbeşte sau ascultă, ci este conţinutul ei obiectiv, care poate fi gîndit de mai mulţi. Dar printre propoziţiile inteligibile există unele propoziţii care conţin desemnări ce nu au o referire, sau în orice caz desemnări pentru care nu putem garanta o referinţă. Să considerăm, de exemplu, propoziţia „Odiseu a fost aruncat la ţărmul Ithacăi pe cînd dormea". Atîta timp cît ne mulţumim să tratăm această propoziţie ca o parte componentă a unei opere de artă, nu trebuie să ne intereseze dacă numele „Odiseu" are o referinţă, dar dacă îl considerăm enunţ veritabil, atunci trebuie să admitem că numele „Odiseu" desemnează ceva despre care predicatul poate fi afirmat sau negat. Dar gîndul rămîne acelaşi, indiferent dacă„Odiseu" are referinţă sau nu, şi astfel cerinţa pe care am pus-o în al doilea caz pentru referinţă ca şi pentru sens trebuie să fie legată într-un fel sau altul de căutarea adevărului. După Frege, ea indică faptul că ne aşteptăm ca propoziţia ca întreg să aibă o referinţă, şi anume valoarea ei de adevăr, sau împrejurarea

că propoziţia este adevărată sau falsă. Pe scurt, „fiecare propoziţie declarativă în care intră în joc referinţai cuvintelor trebuie deci să fie concepută ca un nume propriu; şi anume referinţa ei, dacă există, este Adevăratul sau Falsul”**********.

în *Begriffsschrift,* Frege sugerase că linia judecăţii ar putea fi luată ca echivalentă predicatului comun al tuturor judecăţilor, şi anume „... este un fapt”. Acum însă el respinge această idee.

,.Putem spune chiar direct: «Gîndul că 5 este un număr prim este adevărat». în căzu unei examinări mai atente se poate observa însă că în felul acesta nu s-a spus nimic ma mult decît în propoziţia simplă «5 este un număr prim». Asertarea adevărului rezidă îi ambele cazuri în forma propoziţiei enunţate, chiar şi atunci cînd ea nu posedă putere ei obişnuită; de exemplu, rostită de un artist pe scenă, propoziţia «Gîndul că 5 este u. număr prim este adevărat» conţine un gînd, şi anume acelaşi gînd ca şi simpl propoziţie «5 este un număr prim». De aici, se poate conchide că relaţia gîndului faţ
de adevăr nu poate fi comparată cu cea a subiectului faţă de predicat ... O valoare de adevăr poate fi o parte a unui gînd la fel de puţin ca şi Soarele, deoarece aici nu avem de-a face cu un sens, ci cu un obiect.”††††††††††††††††††††††††††

Dar o valoare de adevăr, argumentează el, poate fi referinţa unei propoziţii. într-adevăr, este evident că valoarea de adevăr depinde de referinţele părţilor propoziţiei şi că ea rămîne neschimbată cînd oricare dintre aceşti componenţi este înlocuit printr-o altă expresie avînd aceeaşi referinţă. Aşa cum spunea Leibniz, „eadem sunt quae sibi mutuo substitui possunt salva veritate”. într-adevăr, „ce altceva s-ar mai putea oare găsi, în afara valorii de adevăr, care să aparţină propoziţiei în mod universal, să depindă cumva de referinţa părţilor componente şi să nu se schimbe în cazul unei substituţii de felul indicat’”‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

Toate acestea se aplică însă numai propoziţiilor complete, întrebuinţate în modul obişnuit. Cînd o formă verbală care ar putea fi utilizată pentru emiterea unui enunţ apare ca o propoziţie subordonată după „ a spune” sau „a crede", sau

---

********** • *liber Sinn und Bedeutung,* p. 34. (Compară şi traducerea, diferită de a noastri din *Sens şi semnificaţie,* în *Logicii şi Filozofie,* Editura politică, 1966, p. 62 — Noi trad.).

†††††††††††††††††††††††††††† *Ibid.,* p. 34—35 (vezi şi *Logică şi filozofie,* p. 63).

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ *Ibid.,* p. 35. Frege pare să citeze din memorie începutul din *Non Inelegans Specimen imonstrandi in Abstractis,* unde Leibniz scria „Eadem sunt quorum unum potest subs-ui alteri salva veritate”, *Philosophische Schriften* (ed. Gerhardt) VII, p. 228.

după un alt verb de acelaşi fel, situaţia se schimbă. într-adevăr, acum această formă se referă la ceea ce în contextul vorbirii directe ar constitui sensul ei. Să considerăm, de exemplu, propoziţia compusă „Copernic credea că orbitele [planetelor sînt cercuri". Evident, adevărul întregului nu se schimbă dacă după „că" substituim o altă expresie a aceluiaşi gînd. Dar valoarea de adevăr a întregului nu ar rămîne în mod necesar neschimbată dacă după „că" am substitui o formă verbală care ar exprima un gînd liferit, dar ar avea întîmplător aceeaşi valoare de adevăr ca şi enunţul .Orbitele planetelor sînt cercuri". într-adevăr, adevărul sau falsi- :atea enunţului despre Copernic nu depinde de adevărul sau falsitatea
i ceea ce, după cum se afirmă, credea Copernic, ci depinde numai de aptul dacă el credea sau nu credea în ceea ce este desemnat de pro- >oziţia subordonată; or, după Frege, această din urmă propoziţie lesemnează un gînd.

Trebuie admis însă că în anumite împrejurări o expresie se poate eferi la o valoare de adevăr tot atît de bine ca la un gînd. Aceasta e întîmplă cînd cineva spune: „Copernic credea pe drept cuvînt că rbitele planetelor sînt circulare"; atunci cuvintele care urmează

ii „că" sînt folosite de fapt de două ori, o dată ca o propoziţie subor- onată şi o dată ca o propoziţie independentă. Dealtfel, doctrina mai îprinde şi alte complicaţii. într-adevăr, dacă, aşa cum susţine Frege, ici un nume nu poate avea referinţă fără să aibă sens, atunci chiar şi o propoziţie subordonată care funcţionează exclusiv în această calitate trebuie să exprime ceva distinct de gîndul pe care îl desemnează ; dar în teoria lui Frege nu există nimic care să indice ce poate fi acest lucru desemnat. S-ar putea ca Frege să fi ignorat dificultatea menţionată din cauză că propoziţiile subordonate de felul celor considerate, adică propoziţiile subiective, nu apar în formulele logice din *Grundgesetze;* oricum ar fi, nu avem de ce să discutăm în continuare, în acest context, această dificultate.

Deşi Frege a extins în mod destul de surprinzător accepţia expresiei „nume propriu", el nu urmărea să susţină că toate semnele ar fi de acelaşi gen. Dimpotrivă, el a insistat cu tărie asupra unei distincţii între numele proprii şi numele — sau semnele — funcţiilor, iar la acest stadiu el înţelegea prin semn al unei funcţii ceea ce anterior numise funcţie, adică

înţelegea o expresie „incompletă" sau „nesaturată", care poate fi completată prin unul sau mai multe nume proprii, pentru a alcătui astfel un nou nume propriu. De exemplu, „$(\ )^2$" şi „Tatăl lui ..." sînt semne funcţionale în cadrul cărora locurile libere sînt indicate prin paranteze necompletate şi puncte. Dar, pentru comoditatea expunerii, Frege introduce o convenţie nouă, prin care locurile libere vor fi indicate prin litere greceşti mici. Spre deosebire de celelalte litere ale scrierii sale, acestea nu trebuie înţelese ca abrevieri sau ca părţi ale unei notaţii a universalităţii, ci pur şi simplu ca semne indicatoare prin care păstrăm locuri deschise pentru semnele de argument veritabile. De exemplu, trebuie scris „tg !• este o funcţie trigonometrică" atunci cînd vorbim despre funcţie ca distinctă de valorile ei, deşi putem scrie „tg x — ", cînd vrem să spunem că pentru orice argument al funcţiei, valoarea lui tg£ este identică cu raportul dintre valoarea lui sin £ pentru acelaşi argument şi valoarea lui cos £ pentru acelaşi argument. Motivul pentru care Jse insistă asupra acestui mod de scriere este că se urmăreşte să se arate clăi că funcţia însăşi este o entitate incompletă sau nesaturată. Uneori matematicienii folosesc cuvîntul „funcţie" cînd ar fi mai potrivit si vorbească fie despre un semn funcţional, fie despre o valoare a func ţiei; dar lucrurile simbolizate nu trebuie niciodată confundate ci simbolurile, iar în rîndul lucrurilor, funcţiile simbolizate nu trebui' niciodată confundate cu obiectele, căci, conform accepţiei conferit de Frege, printre obiecte se includ toate lucrurile care nu sînt funcţi: adică se includ nu numai beţe, pietre şifoameni, ci şi numere sau valoi de adevăr. Da întrebarea „ce este ojfuncţie?" el răspunde că esenţ funcţiei trebuie căutată într-o anumită conexiune sau coordonar între obiectele care sînt argumentele funcţiei şi obiectele care sîr valorile corespunzătoare ale funcţiei. Frege are însă o terminologi specială pentru funcţiile ale căror valori, potrivit teoriei sale, sînt valori de adevăr. Astfel, funcţia reprezentată prin semnul ,,£ este un om" este caracterizată adesea ca fiind conceptul „om" sau ca fiind conceptul *Om,* iar despre funcţia cu două locuri de argumente reprezentată prin semnul ,,£ este tatăl lui £" spunem că este o relaţie.

Cînd Frege vorbeşte despre o funcţie în scrierile sale de după *Begriffs- schrift,* el înţelege prin aceasta întotdeauna ceva independent de gîndire şi limbaj. El nu foloseşte

cuvîntul „concept” ca termen psihologic ; deşi introduce noţiunea generală de funcţie vorbind mai întîi despre semne funcţionale, el priveşte această procedură ca un simplu artificiu de expunere. Cu toate acestea, el admite în mai multej ocazii că întîmpină dificultăţi serioase cînd încearcă să expună clar ce vrea să spună. De exemplu, el afirmă :

,,în cercetările logice avem adesea nevoie să enunţăm ceva despre un concept şi să exprimăm aceasta în forma uzuală pentru atare enunţuri, adică să facem ca ceea ce se enunţă să fie conţinutul predicatului gramatical. în consecinţă, ne-am aştepta ca referinţa subiectului gramatical să fie conceptul; dar acesta, dată fiind natura sa predicativă, nu poate apărea ca atare în acest rol, ci trebuie mai întîi să fie transformat într-un obiect sau, mai precis, trebuie reprezentat printr-un obiect . . . ”[1J].

De asemenea:

,,Dintr-o anumită necesitate de ordin lingvistic, expresia mea, luată literal, îmi tră- Idează gîndul, întrucit numesc un obiect acolo unde este vizat un concept . . . S-ar putea crede că această dificultate ar fi creată în mod artificial ... şi că s-ar putea . . . să considerăm căderea unui obiect sub un concept ca o relaţie înecare unul şi acelaşi lucru poate apărea o dată în calitate de obiect iar altă dată în calitate de concept. Cuvintele .obiect” şi ,,concept” ar servi atunci numai pentru a indica diferitele poziţii în cadrul elaţiei. Lucrul poate fi făcut; dar dacă cineva îşi închipuie că în felul acesta poate ;vita dificultatea, se înşală. Dificultatea este numai deplasată ;ţcăci, nu toate părţile unui ;înd pot fi completate, ci cel puţin una trebuie să fie într-un fel sau altul nesaturată au predicativă; în caz contrar, ele nu ar adera între ele .. . Aceeaşi dificultate pe care ncercam să o evităm în cazul conceptului apare şi la relaţie”[1’].

Jnele din aceste observaţii ar putea sugera că dificultatea este carac- eristică pentru referirile la funcţii de genul celor numite concepte i relaţii, dar Frege continuă prin a spune că acceeaşi neplăcere survine i orice încercare de a explica limpede noţiunea de funcţie aşa cum ste utilizată ea în analiza matematică. Atunci cînd trebuie să anali- ăm ceea ce este esenţialmente incomplet sau nesaturat[14], nu putem vita o anumită inadecvare a expresiei lingvistice.

Filosoful se găseşte pus într-o situaţie foarte jenantă cînd se vede nistrins să afirme că gîndul său nu poate fi exprimat adecvat, şi im arăta că dificultatea în care se află pus Frege se datorează unui §§§§

vorbind în loc de funcţie despre domeniul sau intervalul ei de valori *(Wertverlauf)* d<D(a). în această nouă notaţie, vocala greacă mică între paranteze marchează un loc de argument, ca de obicei, dar vocala corespunzătoare ce apare în faţă cu spirit moale deasupra operează, după cum este convenit, astfel încît să facă din întreg un nume al unui *obiect.* Din păcate, nu este uşor de înţeles exact ce este acest obiect. Cînd introduce pentru prima dată noţiunea, Frege consideră o funcţie matematică simplă i;[2] — 4£ şi observă că modul în care diversele valori posibile ale acestei funcţii sînt asociate cu diferite argumente posibile poate fi reprezentat de o curbă pe o hîrtie milimetrică††††††††††††††††††††††††††††. Întrucît funcţia £(£ — 4) are întotdeauna aceeaşi valoare pentru acelaşi argument ca şi funcţia £[2] — 4^, ea determină în mod evident aceeaşi curbă şi Frege declară că el va exprima această stare de lucruri spunînd că cele două funcţii au acelaşi domeniu de valori, în general, oricare ar fi <!>(£) şi Y(^), enunţul că âO(a) = e'F(e)

a

trebuie înţeles ca avînd aceeaşi referinţă ca şi enunţul că ——— $ (a) = 'F(a), deşi primul enunţ este un enunţ singular de identitate între două obiecte, în timp ce al doilea este un enunţ universal care spune că valoarea unei funcţii este identică cu valoarea celeilalte funcţii, pentru oricare argument dat. Pe baza acestei explicaţii, ar fi firesc să conchidem că un domeniu sau un parcurs de valori este, ca să spunem aşa, extensiunea unei funcţii. într-adevăr, dacă concepem o funcţie ca ceva ce corelează obiecte, şi anume corelează obiectele care sînt argumentele sale cu obiectele care sînt valorile sale, am putea concepe cumva corelaţia completată luată în sine ca fiind uni nou obiect, şi anume o mulţime de perechi ordonate. Or, Frege utilizează într-adevăr cuvîntul „extensiune" *(Umfang)* în această ordine de idei, dar nu exact aşa cum am sugerat. El ne spune că pentru ur concept (adică pentru o funcţie de un argument ale cărei valori sîn1 numai valori de adevăr) domeniul este extensiunea în sensul uzua al logicienilor, adică este mulţimea tuturor obiectelor care cad sul acest concept. în cazul altor funcţii, Frege indică domeniile respectiv acolo unde ele sînt introduse, motivînd acest mod de a opera de la ca la caz, prin faptul că condiţia fundamentală pentru

---

††††††††††††††††††††††††††††††[11] *Uber Funkiion und Begriff,* p. 9.

recunoaşterea iden tăţii a două domenii nu este în sine suficientă pentru determinare esenţei unui domeniu. Aşadar, să nu căutăm în terminologia lui Freg profunzime acolo unde nu e. Atunci cînd Frege vorbeşte despre fixarea domeniului sau parcursului valorilor, pe el îl interesează în mod special descoperirea unui *obiect* care poate reprezenta în anumite privinţe toate funcţiile care iau aceleaşi valori pentru aceleaşi argumente, iar în cadrul impus de această condiţie el consideră că alegerea unui obiect sau a altuia este o chestiune de comoditate.

Oricum ar fi, obiectul pe care Frege îl numeşte domeniu de valori nu trebuie confundat, desigur, cu mulţimea valorilor pe care funcţia le poate lua pentru diverse argumente. Aceasta reiese din faptul că un concept poate lua ca valoare numai o anumită valoare de adevăr, în timp ce domeniul ei, după Frege, este mulţimea obiectelor care cad sub concept. De asemenea, domeniul unei funcţii, aşa cum îl înţelege Frege, nu trebuie confundat cu mulţimea tuturor argumentelor posibile care pot fi plasate în locul pentru argument din cadrul semnului funcţional. într-adevăr, potrivit concepţiei lui Frege, *orice* obiect trebuie considerat drept un argument posibil al funcţiei reprezentate de semnul respectiv. Aşadar propoziţia „2 este un om" are sens, şi putem spune despre ea, în cel mai rău caz, că desemnează falsul. Frege susţine chiar că o funcţie matematică cum este ? + 1, trebuie definită astfel încît să admită şi alte argumente în afara numerelor. Desigur, Frege admite că nu vede nici o utilizare pentru o expresie cum este „Soarele + 1", dar subliniază că într-un limbaj logic perfect trebuie să asigurăm o referinţă a acestei expresii, căci în caz contrar, concepte ca *E,* + 1 = 10 nu vor fi definite precis, şi legi logice ca principiul terţului exclus nu se vor aplica la aceste expresii în mod riguros. Este relativ indiferent care anume regulă o vom stipula pentru cazurile ieşite din comun, dar noi trebuie să le plasăm într-un anumit cadru, pentru a garanta că conceptele noastre sînt bine definite şi că orice nume propriu are o referinţă. O aplicare interesantă a acestui principiu poate fi găsită în analiza pe care o face Frege semnului introdus de el ca un substitut pentru articolul hotărît din vorbirea obişnuită.

Una din întrebuinţările importante ale articolului hotărît este folosirea lui pentru construirea unor descripţii ca „Omul care a descoperit orbitele eliptice ale planetelor", şi tocmai

această utilizare îl interesează pe Frege. în teoria sa despre sens şi referinţă, Frege recunoaşte *a.* rostirea unei atare expresii presupune existenţa unui lucru i numai a unuia care cade sub un anumit concept, dar refuză să spună ă cel ce rosteşte expresia ar aserta şi această presupunere. Or, inînd seama de ceea ce urmăreşte Frege, nu este suficient ca o xpresie care funcţionează ca un nume propriu să aibă referinţă doar tunci cînd există un singur lucru care cade sub un anumit concept; e aceea, Frege introduce o funcţie \ definită prin următoarele sti- pulări: (I) pentru orice argument identic cu un domeniu e(s = A), unde A este un obiect, valoarea funcţiei este A ; (II) pentru orice argument care nu satisface această condiţie, valoarea funcţiei coincide cu argumentul. Dintre aceste două cazuri, cel care corespunde întrebuinţării obişnuite a articolului hotărît este primul caz. Să presupunem, într-adevăr, că C>(^) este un concept sub care cade un obiect şi numai unul A. Atunci, evident, valoarea lui $(!•) pentru un argument oarecare este identică cu valoarea funcţiei *E, =* A pentru acelaşi argument. Dar aceasta ne dă dreptul să afirmăm că â3>(a) = e(e = A), şi astfel avem rezultatul dorit

| dcO(a) = | e(e = A) = A,

adică |â®(a) este unicul membru al lui <x<I>(a) dacă aceasta din urmă este ceea ce logicienii de mai tîrziu au numit clasă-unitate. Pentru menţinerea principiului terţului exclus, este necesar însă să asigurăm o referinţă pentru ,,| <i<I>(a)" în cazul cînd $(!;) nu este o funcţie sub care cade un obiect şi numai unul, iar acest obiectiv este obţinut prin a doua stipulare. Căci, întrucît *ex hypothesi* nu există nici un A astfel încît âC>(a) = *e.(s* = A), avem | â<I)(a) = iS>(a). Aşadar, dacă limba noastră ar fi reformată în conformitate cu legislaţia lui Frege pentru propria lui scriere, o persoană care ar afirma: ,,Regele Franţei este pleşuv", ar putea fi acuzată că face un enunţ fals. Căci, deşi *nu* am putea spune că el afirmă implicit că există un rege şi numai unul al Franţei, am putea spune că el face o observaţie care în împrejurările politice actuale echivalează cu „Clasa regilor Franţei este pleşuvă"; iar această din urmă afirmaţie (care, fără îndoială, trebuie distinsă de „Regii Franţei sînt pleşuvi") este desigur neadevărată, ‘ potrivit concepţiei lui Frege, indiferent dacă există sau nu regi ai Franţei.

3. *Logica din „Grundgesetze"*

Dezvoltînd noţiunea sa de funcţie în întreaga ei generalitate, Freg< o ia ca bază în expunerea logicii sale şi noul program implică o rein terpretare a semnelor pe care le introdusese în lucrarea sa *Begriffs schrift.* Desigur, potrivit noii sale concepţii, linia judecăţii nu est un semn funcţional, deoarece nu mai poate fi interpretată ca o abre viere pentru predicatul „este un fapt" ; dar mai există un sens în car se poate spune că acest semn este în afara logicii. Scopul său, într-a devăr, este pur şi simplu să arate ceea ce asertează autorul; iar logic nu se ocupă de asertare, ci de ceea ce poate fi asertat. Gramatic sistemului reclamă însă ca linia judecăţii să fie urmată de o orizoi

tală de felul celei ce se numea înainte o linie a conţinutului, iar aceasta este, desigur, un semn funcţional. Atunci cînd argumentul său este Adevăratul, £ are ca valoare Adevăratul, iar în toate celelalte
cazuri Falsul. De exemplu, „2 4-2 = 4" nu este propriu-zis un enunţ, ci un nume al Adevăratului, iar----------„2 - 4-2 = 5" şi „----------2"
sînt amîndouă denumiri ale Falsului. Ultimul exemplu poate să pară oarecum surpzinzător, dar aici avem o altă aplicare a principiului iui Frege după care orice obiect trebuie considerat ca un argument posibil al oricărei funcţii dacă din punct de vedere gramatical este posibil să plasăm numele lui în locul pentru argument al semnului funcţional. Frege însuşi nu vorbeşte, în această ordine de idei, despre o posibilitate gramaticală, dar necesitatea acestei noţiuni se poate întrevedea analizînd cele două semne funcţionale care apar imediat după aceea în construcţia sistemului său, şi anume linia negaţiei şi linia condiţiei. Ambele aceste semne prezintă particularitatea că nu pot să apară decît în conexiune cu orizontalele, încît funcţiile pe care le reprezintă pot admite ca argumente numai valori de adevăr. Întrucît valorile proprii ale acestor funcţii sînt şi ele valori de adevăr, ele sînt, ca să spunem aşa, funcţii de la valori de adevăr la valori de adevăr, aşa cum $£^2$ este o funcţie de la numere la numere; din acest motiv, ele au fost numite uneori de către logicienii de mai tîrziu funcţii de adevăr. Pe de altă parte, £ = £ este o funcţie care poate lua ca argumente obiecte de orice fel.

Pînă acum am menţionat numai funcţii care iau ca

argumente unul sau mai multe obiecte ; Frege recunoaşte însă că pot exista funcţii de nivelul doi, sau funcţii de funcţii, şi citează ca exemple _$ şi e<p(e).

Trebuie observat că denumind aceste funcţii, el indică locul argumentului prin intermediul unei litere greceşti mici din acea parte a alfabetului care este de obicei rezervată abrevierilor de semne funcţionale. Un alt exemplu de funcţie de nivel doi este

—i——i—<*p* (a) , funcţie numită uneori existenţă, dar care s-ar îumi mai propriu posesia unui caz sau însuşirea de a avea Adevăratul ca valoare pentru cel puţin un argument. încă în *Grundlagen,* "rege remarcase că argumentul ontologic al existenţei lui Dumnezeu ra greşit deoarece confunda un concept de nivel doi cu un concept de ii vel unu pe care l-ar putea implica un alt concept de nivel unu, ca o iotă sau trăsătură a acestuia din urmă[1]. Pentru aprecierea justeţei acestei critici, ajunge să ne gîndim numai la faptul că Descartes încerca să-şi argumenteze concepţia spunînd că divinitatea implică în mod necesar existenţa tot aşa cum triunghiularitatea implică în mod necesar proprietatea de a avea suma unghiurilor interne egală cu două unghiuri drepte.

Dar abia cînd a scris *Grundgesetze,* Frege a elaborat o notaţie adecvată pentru a vorbi în general despre funcţii de nivel doi. Şi anume :

Hr----------(3))

(3))

pentru: „fiecare funcţie de nivel doi care este valabilă pentru toate funcţiile de nivel unu de un singur argument este valabilă pentru orice funcţie de nivel unu de un singur argument”. Această formulă corespunde, desigur, axiomei:

H---------/(ᶜ)

---

[1] *« Gl.,* § 53.

pe care o enunţase în *Begriffsschrift* pentru funcţiile de nivelul unu, dar aici expresia este mai complicată deoarece trebuie să asigure nu numai o distincţie a funcţiilor după nivel, ci şi o distincţie între funcţii după numărul argumentelor lor. Litera grecească mică dintre parantezele interioare serveşte ca de obicei pentru indicarea unu loc de argument, şi apariţia ei aici este importantă deoarece arată ci funcţiile de nivel unu, pe care le considerăm acum ca argumente, sin de aşa natură îneît ele însele au numai un singur argument. Majuscul; cursivă *„M”* este o variabilă liberă care indică faptul că vorbim despr< funcţii de nivel doi, iar indicele inferior serveşte pentru arătarea faptu lui că funcţiile în cauză sînt de aşa natură îneît angajează funcţl de nivel unu de un singur argument. Dacă am dori să generalizăm c privire la proprietăţile de nivel doi (cum este tranzitivitatea) care po să revină numai la relaţii între doi termeni (adică la funcţii cu dou argumente ale căror valori sînt întotdeauna valori de adevăr), v trebui să scriem două litere greceşti mici între parantezele interioare ş să atribuim doi indici majusculei cursive. Dar cu aceasta complicaţiil nu se termină; ele apar de la sine cînd începem să discutăm funcţii!

de funcţii. într-adevăr, putem considera _ $pi_p(f(B))$

—L— pp,^(f(&,y)) ca funcţii de nivel trei, încercînd apoi să el; borăm o notaţie pentru a vorbi despre toate aceste funcţii. Sau, de asemenea, putem să considerăm funcţii de nivel inegal, cum este aceea de a cădea sub un concept. Frege notează aceste posib'litâţi, dar nu le discută în detaliu. Este într-adevăr clar că lui îi displace pînă şi complicaţia implicată în simbolismul său pentru enunţurile universale referitoare la funcţii de nivel doi de funcţii de nivel unu de un singur argument. într-adevăr, el nu utilizează decît o singură dată axioma specială enunţată mai sus şi se felicită pentru faptul că a fost în stare să evite alte complicaţii, vorbind despre parcursurile valorilor şi nu despre funcţiile care le determină[§§§

ceea ce voia să spună fără referire la obiecte**********. Desigur, majoritatea obiectelor la care se referă nu sînt perceptibile dar, spre deosebire de funcţii, toate obiectele sînt entităţi *complete,* iar după Frege presupunerea că nu pot fi alte obiecte decît cele pe care le vedem sau le pipăim este doar o slăbiciune omenească.

Pentru a trage toate foloasele din notaţia sa pentru intervale, el găseşte însă necesar să introducă o altă funcţie, avînd următoarea definiţie:

” l|— \ i |—->—-â—|—i—g(«) = a \ = apjw.’*
\ [1]----« = »S(e)/

Ca întotdeauna în definiţiile lui Frege, *definiendum-vh* apare aici în partea dreaptă şi, întrucît este un semn funcţional cu două locuri de argumente, este scris cu două litere cursive care figurează şi în partea stîngă. Exprimat în cuvinte, efectul lor este să asigure (I) ;ă pentru orice obiect A şi orice funcţie <£(£), expresia „A fi e<I>(e)” ea avea aceeaşi referinţă ca „O(A)” şi (II) că pentru orice obiect X şi orice obiect T care nu este un parcurs, expresia A fl T ea fi o denumire pentru clasa nulă. Aşadar, dacă trecem :u vederea a doua stipulare, care reprezintă doar o prevedere pentru iazuri supărătoare, expresia n corespunde destul de îndea->roape expresiei ,,£ este un membru al lui Trebuie însă să avem rijă să nu le identificăm, deoarece în schema lui Frege funcţia O(^) u este neapărat un concept. De exemplu, ea poate fi funcţia numerică [2], în care caz 3 fi e(e^2) = 3^2. Sau, de asemenea, poate fi funcţia

********** *Gg.,* I, §§ 9 şi 25.

e(^ > E) ale cărei valori sînt ele însele domenii, în care caz unul din argumentele noii funcţii va fi un *dublu* domeniu de valori, să spunem dx(a > E). Al doilea din aceste exemple este deosebit de important, deoarece Frege întrebuinţează noua sa notaţie ca un mod de exprimare a relaţiilor. Căci

3 n ds(a > s) = **E(3** > s)

^1 cLstfd

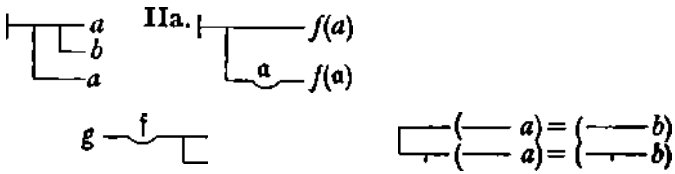
2 fi (3 fi âe(oc > s)) = 2 n s(3 > **E)**

= 3 > 2.

Evident, nu avem nimic de cîştigat din acest mod de scriere într-un caz atît de simplu ca cel pe care l-am ales pentru ilustrare, dar se pare că el oferă marele avantaj al simplităţii în cazurile cînd alte moduri de scriere ar presupune aplicarea cuantorilor la funcţii relaţionale de nivel mai înalt, şi din acest motiv Frege îl utilizează pe scară largă în dezvoltarea ulterioară a sistemului său.

Pentru aceea ce urmărim acum, nu este necesar să considerăm detaliile structurii edificate de Frege pe temelia pe care am descris-o, dar axiomele şi regulile în care el formulează logica lui *Grundgesetze* merită să fie consemnate.

Ca axiome sau legi fundamentale, Frege stabileşte



următoarele şapte aserţiuni††††††††††††††††††††††††††††:

V.F(i/(S) = ^(a)) = (-^-/(a) = g(«))

VI. j-a = |e(« = **E)**

Trebuie să observăm că, în afară de linia orizontală cerută pentr exprimarea oricărei aserţiuni în cadrul scrierii, toate celelalte semn de bază au cîte o singură axiomă, care determină folosirea lor, şi c ordinea introducerii este, se pare, după complexitatea crescînd: Astfel, IV apare acolo unde apare, deoarece Frege consideră acui potrivit să fixeze semnificaţia liniei negaţiei prin intermediul semnt lui

††††††††††††††††††††††††††††† *Gg.,* I, § 47.

identităţii introdus în III. Dar el nu pune nici un accent speci; pe acest aranjament şi singura axiomă pe care o comentează m: amplu este V. Despre aceasta el observă că trebuie acceptată ca o lege distinctă a logicii deoarece este esenţială pentru dezvoltarea sistemului său şi nu poate fi dedusă din alte legi de bază. Cînd logicienii vorbesc despre extensiunile conceptelor, ei presupun întotdeauna această lege, deşi de obicei nu în mod explicit. Legea are o importanţă fundamentală în orice încercare de construire a unui calcul al logicii în maniera lui Leibniz sau Boole şi este tot atît de importantă în expunerea fundamentelor aritmeticii, deoarece numerele de toate tipurile, chiar şi numerele naturale, trebuie definite ca extensiuni de concepte‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

În afară de mijloacele pentru funcţii, despre care nu se face menţiune în *Begriffsschrift,* acest sistem de axiome pentru logică diferă de sistemul anterior al lui Frege prin faptul că nu este destinat să fie utilizat împreună cu *modus ponens* şi principiul substituţiei ca unicele reguli de inferenţă. Din considerente practice de convenabilitate şi conciziune în efectuarea deducţiilor, Frege înlocuieşte acum unele axiome anterioare şi chiar unele din teoremele sale prin noi reguli de inferenţă. Dar el prezintă aceste din urmă reguli ca elemente ale unei colecţii generale de reguli pentru utilizarea scrierii sale; pentru a arăta cît de exactă este gîndirea sa, vom rezuma toate aceste reguli, exceptînd ultimile şase, care sînt simple convenţii cu privire la folosirea parantezelor§§§

schimba întotdeaa- na locurile dacă valorile de adevăr ale ambelor sînt modificate în acelaşi timp (adică rin negaţie).

4. *Amalgamarea condiţiilor similare.* O clauză inferioară care apare de mai multe ori acelaşi enunţ nu trebuie scrisă decît o singură dată.

5. *înlocuirea unei litere cursive printr-o literă gotică.* O literă cursivă poate fi înlocuită tr-un enunţ în care apare prin una şi aceeaşi literă gotică — cu alte cuvinte o literă de obiecte printr-o literă de obiecte şi o literă de funcţii printr-o literă de funcţii, cu singura condiţie ca litera gotică să fie introdusă în acelaşi timp într-o concavitate dinaintea unei clauze superioare în afara căreia litera cursivă respectivă nu figura. Dacă însă această clauză superioară conţine întregul domeniu de acţiune al unei litere gotice iar litera cursivă figura înăuntrul acelui domeniu de acţiune, atunci noua literă gotică aleasă trebuie să difere de cea veche.

6. *Inferenţă* (a). Dacă un enunţ are o clauză inferioară care se deosebeşte de un alt enunţ numai prin absenţa liniei judecăţii, putem afirma în calitate de concluzie enunţul care rezultă din primul prin suprimarea clauzei inferioare.

7. *Inferenţă* (&). Dacă una şi aceeaşi alăturare de semne (nume proprii sau schemă de obiecte cu litere cursive) intră într-un enunţ în calitate de clauză superioară iar în alt enunţ ca o clauză inferioară, putem aserta ca concluzie un enunţ care are drept clauză superioară clauza superioară a celui de-al doilea, iar ca clauze inferioare toate clauzele inferioare ale ambelor enunţuri, cu excepţia celei deja menţionate. în această tranziţie, clauzele inferioare similare se pot amalgama conform regulii (4).

8. *Inferenţă* (c). Dacă două enunţuri au aceeaşi clauză superioară şi o clauză inferioară a unuia diferă de o clauză inferioară a celuilalt numai prin faptul că înaintea sa stă o linie a negaţiei, putem aserta în calitate de concluzie un enunţ care are ca clauză superioară clauza superioară a ambelor şi are ca clauze inferioare toate clauzele inferioare ale ambelor enunţuri, cu excepţia celor două menţionate mai sus.

9. *Citarea enunţurilor cu substituţie pentru litere cursive.* Cînd citǎm un enunţ, putere în acelaşi timp să efectuăm o inferenţă simplă fie prin substituirea aceluiaşi nume proprii sau a aceleiaşi scheme de obiecte cu litere cursive pretutindeni unde apare o anumit! literă de obiecte cursivă, fie prin substituirea aceluiaşi nume al unei funcţii sau schenu de funcţie cursive pretutindeni unde apare o anumită literă de funcţie cursivă, cu singur; condiţie ca în acest din urmă caz să păstrăm nivelul şi numărul argumentelor funcţie pe care o indica litera de funcţie cursivă iniţială.

10. *Citarea enunţurilor cu înlocuirea literelor gotice.* Cînd citǎm un enunţ, putem în locui o literă gotică într-o concavitate şi în toate locurile de argumente ale funcţiei res pective printr-o altă literă gotică de acelaşi fel (adică printr-o literă de obiecte sau o lite ră de funcţii, după cum este cazul), cu singura condiţie ca să nu abolim prin aceast nici o deosebire de litere în enunţul iniţial acolo unde domeniul de acţiune al unei liter conţinea domeniul de acţiune al alteia iar prima literă figura în domeniul de acţiun al celei de a doua.

11. *Citarea enunţurilor cu înlocuire a vocalelor greceşti.* Cînd citǎm un enunţ, putei înlocui o vocală grecească de sub un spirit moale precum şi în toate locurile de ârgi mente ale funcţiei respective printr-o altă vocală grecească, supusă aceleiaşi condiţii c şi în regula precedentă.

12. *Citarea definiţiilor.* Cînd citǎm o definiţie, putem înlocui linia definiţiei prin lin judecăţii, efectuînd totodată modificările permise în citarea enunţurilor, conform uit melor trei reguli.

După Frege, toate adevărurile aritmeticii sînt deductibile din axi< mele sale, prin aplicarea regulilor sale. Este însă evident că aritmetic tratează noţiuni, în special cea de număr, pentru care nu avem expres simple din rîndul semnelor de bază ale lui Frege. De aceea, o coi diţie esenţială a succesului demersului său era să se arate modul care aceste noţiuni se pot defini prin complexe de semne de bază, i; din motive de claritate s-ar cere să se construiască un şir de defini} în care fiecare element ulterior le presupune pe cele anterioare. Es însă binecunoscut faptul că în construirea definiţiilor ca şi a infere elor pot fi comise erori; de aceea, Frege, îngrijindu-se, ca de obicei, le rigoare, încearcă să preîntîmpine acest pericol stabilind şapte prin-ipii, care trebuie respectate ori de cîte ori în sistemul său sînt intro- luse prin definiţie expresii noi[21]. Trei dintre aceste principii sînt foarte ;enerale, iar celelalte patru privesc diverse cazuri speciale care apar în istemul său. Din nou vom rezuma:

1. Orice nume construit corect pe baza numelor definite trebuie să aibă un referent, ăci în caz contrar ar rămîne nedeterminate problemele privind aplicabilitatea semne- >r.
2. Nu este permis ca unul şi acelaşi semn să fie definit în două moduri diferite, deoa- sce în caz contrar s-ar putea ridica problema dacă cele două definiţii concordă.
3. Un nume definit trebuie să fie simplu, adică să nu fie compus din alte nume, deoa- ece în caz contrar concordanţa explicaţiilor acestor nume ar putea fi pusă sub semnul itrebării.
4. Un nume propriu introdus printr-o definiţie trebuie să fie înlocuibil pretutindeni iude apare prin definiens; nu este permis niciodată să fie utilizat ca un nume al :nei funcţii, deoarece de la această întrebuinţare nu putem reveni la numele de bază.
5. Un nume introdus pentru o funcţie de nivel unu de un singur argument trebuie ă conţină un singur loc de argument, căci dacă ar avea mai multe locuri de argument, le ar putea fi completate în mod diferit, ceea ce ar avea ca rezultat faptul că numele ar junge să reprezinte o funcţie de mai multe argumente. în definiţie, toate locurile de ■rgnment ale definiens-ului trebuie completate cu una şi aceeaşi literă cursivă, care trebuie ntrebulnţată şi pentru a indica locul de argument al definiendtim-ului.
6. în mod similar, un nume introdus pentru o funcţie de nivel unu de două argumente rebuie să conţină două şi numai două locuri de argumente. în definiţie, toate locurile >entru argumente înrudite ale definiendum-ului trebuie completate cu una şi aceeaşi iteră cursivă, care urmează să fie utilizată şi pentru a indica unul din cele două locuri ,e argument ale definiendum-ului; locurile pentru argumente neînrudite trebuie comple- ite cu litere diferite.**********

********** " *Gg„* I, § 33.

7. Rezultă că o definiţie nu poate conţine niciodată în vreo parte a ei o literă cursivă are nu apare şi în cealaltă parte. Dacă substituirea unor nume proprii pentru litere cursive 1 definiens îl transformă pe acesta într-un nume propriu corect construit, atunci, conform invenţiilor sistemului, denumirea funcţiei care apare ca definiendum are întotdeauna referinţă.

4. *Realizările lui Frege*

Begriffsschrift este primul sistem de logică formală cu adevărat jprinzător. Aristotel se preocupa în principal de anumite varietăţi jmune de judecăţi generale. E adevărat că el a formulat principiile on-contradicţiei şi terţului exclus, care aparţin unei părţi a logicii iai profunde decît teoria sa despre silogism; dar el nu a reuşit să-şi dea seama de necesitatea unei expuneri sistematice a logici primare. Această expunere a fost realizată, cel puţin parţial, de către Hrisip ; dar nici acesta şi nici logicienii medievali care au scris despn *consequentiae* nu au reuşit să arate clar relaţia dintre logica primari şi logica generală. Recunoscînd paralelismul între logica primară ş anumite propoziţii ale logicii generale cu privire la atribute sau clase Leibniz şi Boole au elaborat într-un mod abstract un calcul ce păre; să acopere ambele domenii; dar nici unul dintre aceşti autori ni a lărgit concepţia tradiţională a logicii pentru a include teoria relaţii lor. Dezvoltînd unele sugestii ale lui De Morgan, Peirce aţ explora acest domeniu nou şi, la scurt timp după publicarea lui *Begriffs schrift,* a elaborat chiar în mod independent o teorie a funcţiilor prevăzută cu o notaţie adecvată pentru exprimarea tuturor principiilo formulate de Frege; dar el nu şi-a sistematizat niciodată ideile şi nic nu a formulat un număr de principii de bază, ca cele expuse în sec ţiunea precedentă. Opera lui Frege, pe de altă parte, conţine toat elementele esenţiale ale logicii moderne ; nu comitem nici o nedreptate faţă de predecesorii sau de urmaşii săi dacă spunem că anul 187! este data cea mai importantă în istoria materiei noastre.

Dintre toate noutăţile introduse de Frege, cea mai importantă a fos utilizarea cuantorilor. în expunerea noastră cu privire la contribuţii la logică a lui Peirce, am atras deja atenţia asupra semnificaţiei ace stui pas, dar este indicat ca, ajunşi aici, să subliniem încă o dati că utilizarea cuantorilor pentru legarea variabilelor este principale trăsătură distinctivă a simbolismului logicii moderne şi procedeu care

o face să fie superioară nu numai limbajului obişnuit, ci ş simbolismului de tip algebric întrebuinţat de Boole. în felu acesta sîntem capabili cel puţin să înţelegem şi să prezentăm clar într-c schemă raţională simplă o mulţime de complicaţii care i-au intrigai pe logicienii din epocile anterioare şi care erau rezolvate cel mult prii teorii *ad-hoc,* cum este cea argumentelor xarâ 7rp6aX7)tpiv, cea < modalităţilor *de re* şi *de dicto,* cea despre *suppositio persortalis confusl et distributiva singulata,* precum şi despre multe alte varietăţi d *suppositio,* cea a simbolului *v* al lui Boole şi cea a algebrei relativeloi Mai mult, pînă şi teoria aşa-zis simplă a celor patru spețe de enun categoric devine mai uşor de înţeles cînd ne dăm seama de faptul cî indiferent de ce mai poate comunica în plus, „Orice om este muritor implică în mod necesar închiderea universală a expresiei funcţional „dacă *x* este om, *x* este muritor". Abia după ce s-a clarificat ace; lucru, devine clar şi raportul dintre logica lui Aristotel şi cea a stoicilo Pe scurt, nu este exagerat să spunem că utilizarea cuantorilor î vederea legării variabilelor a fost una dintre cele mai mari invenţ teoretice ale seco ului nouăsprezece.

Exceptînd poate *Grundlagen,* operele lui Frege nu au fost niciodată citite pe scară largă. Fără îndoială, unii oameni care au deschis cărţile sale au fost înspăimîntaţi de simbolismul lor. Bertrand Russell, de exemplu, mărturiseşte că la primul său contact cu volumul I din *Grundgesetze* el nu a reuşit, tocmai din acest motiv, să sesizeze importanţa cărţii sau măcar să-i înţeleagă conţinutul[23]. Dar aspectul rebarbativ al scrierilor sale nu poate fi considerat drept cauza unică sau cel puţin principală a faptului că logicienii au recunoscut cu întîrziere marile merite ale lui Frege. Adevărul este, după cum se pare, că Frege a prezentat prea multe noutăţi dificile dintr-o dată, făcînd totodată prea puţine concesii slăbiciunii omeneşti. Cea mai 'mare parte din textul german al scrierilor sale logice este clar, dar expunerea propriilor sale concepţii, spre deosebire de critica la adresa concepţiilor altor autori, este foarte condensată, şi un cititor nebinevoitor poate avea impresia că Frege a fost extrem de critic faţă de utilizarea limbajului de către alţii, dar s-a făcut că nu vede natura deconcertantă a multora dintre formulările sale privitoare la valori de adevăr, funcţii Iintervale de valori. Ca şi alţi inovatori din logică, Frege a fost însea privit ca un producător de subtilităţi inutile. Dar aceasta nu eamnă că opera sa nu a avut nici o influenţă.

Dimpotrivă, scrierile e sînt o adevărată mină din care succesorii lui au extras, în diferite Jci, un material nou.

în perioada cînd lucra la terminarea cărţii sale *Principles of Mathe- tics* (al cărei prim şi singur volum a fost publicat în 1903), Russell întreprins un studiu mai amănunţit al logicii lui Frege şi a scris Appendix care este poate prima recenzie favorabilă mai amplă operei lui Frege de la *Begriffsschrift* pînă la primul volum din *indgesetze.* în volumul I din *Principia Mathematica,* publicat de N. Whitehead şi B. Russell în 1910, influenţa lui Frege este mani- tă ; pînă şi acele doctrine ale lui Russell în care acesta îl contrazice Frege (de ex. teoria sa asupra descripţiilor şi teoria tipurilor) fost cel puţin sugerate de dificultăţile din opera lui Frege. Ceva ii tîrziu, Ludwig' Wittgenstein a devenit un admirator al lui Frege, rezultate ce pot fi văzute în diverse locuri din *Tractatus Logico-lilosophicus* (publicat pentru prima dată în 1921, ca articol în *'.nalen der Naturphilosophie* ale lui Ostwald). De curînd, doctrina Frege despre sens şi referinţă, care mulţi ani fusese considerată Fi partea cea mai sterilă a operei sale, a fost reconsiderată în mod zorabil de către Rudolf Carnap[24] şi Alonzo Church[26].

[14] *Principles of Mathematics,* p. VI.
[14] *Semnificaţie şi necesitate,* în special § 8 şi §§ 28 — 30.
[“] *Introduction to Mathematical Logic,* voi. I, §§ 01—04.

După cum se pare, logicienii au recunoscut meritele ideilor lui Frege numai atunci cînd ei înşişi au fost gata să discute problemele ridicate de el. Aceasta nu înseamnă că istoria logicii în secolul XX este simpla relatare a asimilării treptate a operei sale în corpul doctrinei acceptate; în fapt, au intervenit unele inovaţii foarte importante, la care Frege nu s-a gîndit niciodată. Dar realizările sale au fost atît de mari, încît o bună parte din ceea ce vine după el poate fi pus în legătură în modul cel mai adecvat cu opera sa.

în capitolul următor vom considera dezvoltările formale din logică de după Frege, deschizînd fiecare problemă cu o scurtă menţiune a poziţiei sale. Apoi vom trece la discutarea unor probleme din filoso- fia logicii care au fost suscitate de opera sa, şi în special probleme privitoare la sens şi referinţă. într-un al treilea capitol vom relua istoria filosofiei matematicii, pornind de la publicarea celui de-al doilea volum din *Grundgesetze,* care conţine *unNachwort* cu privire

la descoperirea de către Russell a unei contradicţii în sistemul lui Frege.

DEZVOLTĂRI FORMALE DUPĂ FREGE

1. *Varietăţi de simbolism*

Detaliile aparatului pe care l-a inventat Frege pentru prezentarea logicii sînt extrem de ingenioase. Sîntem de acord că scrierea lui este complicată, dar faptul că el utilizează caractere tipografice din diferite garnituri îi permite să deosebească diferitele roluri ale literelor pe care denumirea tehnică de „variabilă” le confundă adesea ; insistenţa sa în ce priveşte demarcarea dintre utilizarea şi menţionarea simbolurilor este demnă de admirat. în această secţiune vom examina schimbările care s-au efectuat după el şi pînă în zilele noastre în vederea unei mai mari simplităţi şi claritătţi. în acest sens, este convenabil să începem cu convenţiile semnelor de citare.

Deşi ţelul lui Frege, atunci cînd îşi elaborează scrierea, este de a da un *substitut* pentru limbajul uzual în ce priveşte prezentarea matematicii, de fapt el introduce această scriere cu ajutorul limbajului uzual şi în această etapă el nu ezită s-o trateze ca pe un *supliment* al acestui limbaj. Cu alte cuvinte, exact cum chimiştii amestecă semnele lor speciale cu cuvintele din limba maternă, tot astfel Frege scrie idesea propoziţii în care, alături de cuvinte germane, utilizează semnele sale speciale. în mod firesc, aceste semne apar în acest context fără semnele citării. Cînd însă, pe de altă parte, el doreşte să *menţioneze* semnele sale speciale în cursul unei propoziţii formulate în germană, d le cuprinde între semne de citare, exact aşa cum ar fi cuprins cuvinte ţcrmane dacă ar fi avut de vorbit despre ele. în capitolul precedent,)entru a da o imagine fidelă a operei sale, am urmat această practică le-a lungul întregii expuneri a logicii lui Frege. Totuşi, ar fi o eroare ă credem că introducerea semnelor citării ar fi modul unic, sau măcar ptim de evitare a confuziei dintre utilizarea simbolurilor speciale i menţionarea lor. O metodă mai simplă constă în a renunţa de la iun început la orice folosire

a simbolismului special ca supliment i limbajul uzual, precizînd astfel că ori de cîte ori apar simboluri peciale ele trebuie să fie considerate ca fiind citate. Clasicişti adoptă e obicei această practică atunci cînd discută cuvintele dintr-un ;xt clasic (deşi uneori şi ei îşi permit să *utilizeze* cuvinte din elină iu latină, aşa cum am făcut noi în capitolele anterioare, unde nu

exista pericolul vreunei confuzii reale), iar un exemplu de aplicare a acestei practici la logică (practică foarte apropiată de cea a lui Boole) se poate găsi în secţiunea noastră cu privire la algebra logicii. Î11 toate aceste cazuri este folositor ca semnele supuse discuţiei să se deosebească tipografic de cele din limbajul uzual, de exemplu tipărind cursiv toate literele din simbolismul special. Dar simplitatea acestui procedeu se plăteşte în multe cazuri prin formulări mai greoaie, astfel încît tehnica lui Frege pare să fie mai naturală. De exemplu, în loc de a spune *„a + b* este clasa care are ca membri toate lucrurile care sînt membri fie ai clasei *a,* fie ai clasei *b",* trebuie să spunem *„a + b* desemnează clasa care are ca membri toate lucrurile care sînt fie membri ai clasei desemnate prin *a,* fie membri ai clasei desemnate prin *b".* Alegerea uneia dintre cele două metode este o chestiune de gust. în continuare, noi vom urma practica din secţiunea privitoare la algebra logicii şi nu practica lui Frege, deoarece prima pare a fi mai economică pentru ceea ce urmărim. Dar, pentru a păstra avantajele ambelor procedee ne vom permite uneori să combinăm cuvinte din limba noastră cu semne speciale din logică; iar atunci cînd vom proceda astfel, vom tipări cuvintele respective cu caractere cursive, pentru a arăta că în context ele secundează scrierea specială supusă discuţiei.

Utilizarea de către Frege a literelor de diferite caractere pentru expunerea regulilor de bază din sistemul său este un instrument foarte convenabil, care ar putea fi adoptat în mod avantajos de către toţi logicienii, independent de punctul lor de vedere cu privire la citare. De exemplu, el ne spune:

«Din două enunţuri r" şi „j—A" putem deriva enunţul ..nr"»‡‡‡

enunţurilt aparţinînd scrierii. Din acest motiv, ele trebuie să aibă proprietatea specifică de a depăşi semnele de citare în cadrul cărora sînt cuprinse Aceasta i-a şocat pe anumiţi critici care consideră că semnele citări pot fi utilizate numai pentru a făuri un nume din ceea ce intervin în cuprinsul lor. Dar o asemenea obiecţie consideră posibilităţile limbajului într-un mod prea strimt. Dacă specificăm de la bun început, după cum face Frege, că majusculele greceşti stau în această relaţie împreună cu semnele citării cu care figurează în textul nostru, atunci acest procedeu nu are nimic impropriu. Semnele citării au fost făcute pentru om şi nu omul pentru semnele citării.

în practică ne vom dispensa de semnele citării pentru motivul arătat mai sus şi vom utiliza majuscule cursive în locul majusculelor **1''** e ale lui Frege. Scrierea cursivă sugerează legătura cu scrierea iială pe care o utilizăm pentru logică (adică o legătură care ar ea fi indicată în altă convenţie prin includerea aceloraşi semne :itare), dar utilizarea literelor mari sugerează puterea de depăşire care tocmai am vorbit. Deoarece utilizarea lor principală constă prezentarea unor reguli prin intermediul unor scheme cum ar

P Dacă P atunci Q

; mai convenabil să-l urmăm pe W. V. Quine, caracterizîndu-l e 'itere de scheme§§§

tactice.

n lucrarea lui Hilbert şi Ackermann *Grundzuge der theoretischen 'ik* precum şi în lucrarea lui Hilbert şi Bernays *Grundlagen der thematik* se folosesc în acest scop literele gotice, dar cu o rafinare ţională întrucît literele mari reprezintă *expresii* de propoziţii şi cţii propoziţionale, iar literele mici reprezintă *desemnări* de tot 11. Întrucît, aşa cum vom vedea în capitolul următor, nerecu- şterea distincţiei dintre expresii (în sens strict) şi desemnări a naştere la confuzii, introducerea unei convenţii pentru a deosebi rele care le reprezintă este o realizare a tehnicii lui Frege, dar

acest ţel se poate obţine mai economic rezervînd pentru diferite scopuri litere din diferitele porţiuni al alfabetului. în cele ce urmează vom folosi literele *P,* Q, *R, S* şi *T* ca reprezentative pentru expresiile propoziţionale, literele *F, G, H, J* şi *K* ca reprezentative pentru expresiile de funcţii propoziţionale, iar literele *X, Y, Z, V, W* ca reprezentative pentru desemnări. Dacă vrem să considerăm o schemă comună pentru acele formule din scriere care diferă numai în ce priveşte variabilele pe care le conţin (de exemplu în scrierea lui Frege schema comună pentru —[1] +----[=] 1 + [1] 5********** — [rt] +

+ 1 = 1 + n), atunci le putem reprezenta prin litere speciale cu acelaşi statut ca şi literele noastre de scheme, cu condiţia ca să stabilim într-un fel sau altul în mod clar că semnele reprezentative sînt variabile aparţinînd scrierii. Dacă însă ne mulţumim să tratăm varia^ bilele din scriere ca o parte a aparatului formal semnificînd doai înlănţuirea de locuri goale, ne putem mulţumi cu varietăţile d<. litere de scheme pe care le-am menţionat mai sus, întrucît acestea sîm suficiente pentru enunţările pe care trebuie să le facem în calitati de logicieni.

Pentru o bună înţelegere a utilizării literelor de scheme este esenţia să ne dăm seama că ele nu sînt nici variabile ale scrierii speciale supus cercetării, nici simboluri de felul celor pe care le introduc mulţi logi cieni moderni sub numele de variabile sintactice sau metalingvistic (adică simboluri care marchează locurile goale, convenabile pentr

********** R. Carnap, *The Logical Syntax of Language,* § 4; W. V. Quine, *Mathenrai Logic.* §§ 4 — 6.

desemnarea semnelor din scrierea de bază)[3]. Literele de scheme trebui să fie considerate mai curînd, aşa cum a propus Frege, ca abrevie pentru orice semne sau complexe de semne de caracter convenab pe care cititorul le poate selecţiona din scrierea de bază. Ele sîi cu adevărat variabile, dar. de un tip specific. Deşi ele intervin împreui cu semnele citării (sau în orice caz în pasaje în care s-ar putea folo semnele citării), ele nu sînt niciodată citate ca atare (adică meni ouate) chiar dacă sînt singure, afară de cazul cînd, ca în alineatB precedent, le denumim în mod expres litere. Locurile goale pe caB ele le marchează trebuie să fie tratate ca şi cum ar fi efectuate **B** cadrul materialului citat *după ce el a fost citat.* De aici rezultă **B** ele constituie un instrument al discursului de nivelul al doilea şi fl universalitatea pe care o pot exprima aparţine unui asemenea discuB şi nu celui citat. Această utilizare impune o convenţie specială B privire la citare, dar o convenţie care este simplă şi naturală. **B** fapt, este convenţia pe care o urmează stoicii atunci cînd îşi preziiB logica lor primară cu ajutorul unor expresii ca „primul" şi „al doilea", precum şi succesorii lui Aristotel atunci cînd expun teoria silogismului cu ajutorul unor şabloane de raţionament.

în cazul scrierii lui Frege, instrumentul de bază este utilizarea literelor gotice pentru a marca locurile goale din expresii. După cum se exprimă el, acest procedeu este inseparabil de utilizarea literelor gotice în concavităţile liniilor orizontale ca prefixe sau cuantori universali. Dar se poate concepe cu uşurinţă o modificare a scrierii sale astfel îneît ea să cuprindă nu numai cuantori universali, dar şi pre fixe de alt tip. De exemplu, Frege ar fi putut scrie $ (a) închiderea existenţială a unei funcţii propoziţionale, adică drept un echivalent pentru $(a). De asemenea, el ar fi putut folosi li tere gotice în locul vocalelor greceşti mici pentru notarea parcursurilor de valori. De exemplu, el ar fi putut scrie a<J>(a) în loc de â<D(a) ca semn pentru clasa căruia un lucru îi aparţine
A

atunci şi numai atunci cînd are caracteristica exprimată prin O. Asemenea modificări se găsesc de fapt în scrierea pe care Whitehead şi Russell au utilizat-o în lucrarea lor *Principia Mathematica.* în conformitate cu convenţia folosită de ei şi de majoritatea autorilor de după ei, semnele pentru locurile goale sînt litere cursive mici (/>, *q, r,* s şi *t* în locurile goale :are sînt de completat cu expresii propoziţionale, *f, g, h, j* şi *k* în ocurile goale care sînt de completat cu expresii funcţionale şi *x, y,* r, *v* şi *w* în locurile goale care sînt de completat cu desemnări) şi ivem totodată diferite prefixe cu ajutorul cărora aceste litere pot i legate, rezultatele fiind cele arătate în tabela următoare:

x)F(x)..... Orice am lua, F (acela).
Jx)F(x)……Există un anumit F (care).
■F(x)..... Clasa tuturor lucrurilor F (care).
\x)F(x)…… Unicul lucru F (care).

în primele două exemple, semnul complex realizat prin adăugarea refixului este o expresie, pe cînd în celelalte două este o desemnare. Ivident, utilizarea aceloraşi caractere pentru marcarea locurilor oale în toate aceste cazuri nu aduce nici un dezavantaj, ci, dimpotrivă, vem încă un cîştig de claritate.

Prin traducerile incluse în tabela de mai sus am încercat să punem L evidenţă faptul că literele cursive servesc aici nu numai pentru marca locurile goale, dar şi pentru a le lega cu prefixe. După cum spune W. V. Quine[4], rolul lor în logica simbolică este analog celui pe care în limbajul uzual îl are pronumele. Unii logicieni încearcă să precizeze aceasta citind *(x)F(x)* ca şi cînd ar fi o abreviere a expresiei *Pentru orice x, F (x)* şi oferind lecturi similare pentru celelalte semne compuse din lista de mai sus. Ca instrument tehnic, o asemenea exprimare ar putea fi nevinovată şi convenabilă, dar ea este nesatisfăcătoare în calitate de explicaţie, deoarece cuprinde un amestec nefericit de simbolism tehnic şi limbaj uzual. Cînd în limba obişnuită citim „pentru orice... ”, ne gîndim la o lacună care ar trebui completată printr-un termen general cum ar fi „om”, dar nu la aceasta ne referim în toate locurile pe care le marcăm cu *x.* Pe de altă parte, dacă ne permitem să concepem pe *F* ca termen general, adică în calitate de adjectiv, putem obţine versiuni care sună natural, şi anume : *fiecare lucru este F, un anumit lucru este*

F, clasa tuturor lucrurilor F şi *unicu. lucru F.* Dar nici asemenea citiri nu sînt cu totul corecte, deoarece o expresie funcţională nu este un termen general cum ar fi „pătrat", ci mai curînd ceva care aduce a „...este pătrat".

Cînd vrea să vorbească despre o funcţie (adică s-o considere ca subiect al vorbirii sale), Frege utilizează un semn compus de forma $(!;), în care litera grecească mică este un semn de loc gol destinai să arate natura nesaturată a funcţiei şi în acelaşi timp să indice felul în care funcţia intră în discurs. Totuşi, el uită să observe că întregul semn <!>(!•) trebuie să fie o *desemnare* a unei funcţii şi, ca atare, nu poate să fie incomplet în acelaşi fel în care este incompletă o *expresie* funcţională. în asemenea contexte, Whitehead şi Russell utilizează semnul compus *F(x).* Acest semn are meritul de a păstra caracteru obişnuit al semnului pentru locul gol, dar cu modificarea necesari; pentru a arăta utilizarea specială care se atribuie acum întregulu semn. Situaţia ar fi şi mai clară dacă am permite ca expresia funcţio nală să apară în înfăţişarea sa obişnuită, dar cu un prefix introdu: în mod explicit în scopul de a alcătui desemnări. Corespunzător ci abstractorul de clasă pe care l-am amintit mai sus am putea ave: un abstractor de funcţie *x.* Atunci *x F(x)* ar fi o prescurtare pentr *funcţia satisfăcută, de orice lucru F(care),* şi cel care ar folosi aces semn n-ar fi în pericolul de a presupune, aşa cum o face Frege, c vorbirea despre funcţii trebuie să impună în mod inevitabil o grs matică proastă. Totuşi, pentru uniformitate, vom aplica în cele c urmează practica lui Whitehead şi Russell[8].

în toate contextele pe care le-am considerat pînă acum, semne pentru locurile goale intervin în cadrul unor expresii funcţiona

‘ *Mathematical Logic,* § 12. A se vedea şi G. Peano, *Formulaire,* 1897, p. 23.

* în acest sens, A. Church utilizează notaţia X *xFx.* care la rîndul lor apar ca părţi ale unor semne complexe mai întinse; aici fiecare variabilă, cum este numită de obicei, are un prefix sau un alt semn care o leagă. Dar în contextul pentru care noi păstrăm caracterele cursive, Frege utiliza semne de locuri libere pentru a exprima universalitatea fără ajutorul prefixelor. După cum explică el, o expresie care conţine litere cursive trebuie să fie considerată ea o abreviere a unei expresii similare, cu unica deosebire că cuprinde litere gotice în locul celor cursive iar la început posedă cuantori

universali care guvernează întregul. Aceeaşi explicaţie pentru variabile reale (adică variabile libere utilizate pentru exprimarea universalităţii) se poate găsi şi în introducerea lui Russell la ediţia a doua din *Principia Mathematica.* Rezultă că o expresie care conţine variabile reale nu poate apare niciodată în calitate de parte proprie a unei expresii propoziţionale mai întinse (în afară de cazul cînd este marcată prin semnele citării sau în alt mod similar) adică în alţi termeni: domeniul de acţiune al universalităţii exprimate prin utilizarea unei variabile libere trebuie să fie întreaga expresie în care figurează ea. Deoarece lucrurile stau astfel, nu mai este strict necesar să utilizăm caractere tipografice speciale pentru semnele de locuri goale, care exprimă universalitatea fără ajutorul prefixelor. Rolul adiţional care le revine este indicat deja de faptul că expresiile în care intervin apar ca enunţuri complete. Astfel, ori de cîte ori este clar din context că o expresie *F(x)* trebuie să fie considerată ca o propoziţie, trebuie s-o înţelegem ca o abreviere pentru *(x)F(x).* Dacă însă termenul ar fi adesea citat leu semnele citării sau, aşa cum o facem aici, ar fi complicat să indicăm de fiecare dată ce anume a fost citat, şi în asemenea împrejurări ar fi util să adoptăm convenţia că *x* rămîne doar un semn de loc gol, în afară de cazul cînd este modificat într-un anumit fel (de exemplu, folosit cu caractere grase) pentru a arăta că are rolul adiţional de a exprima universalitate. Dar nici măcar aceasta nu este necesar în lucrările lui Frege sau în *Principia Mathematica,* unde Whitehead ?i Russell urmează practica lui Frege de a folosi semnul de aserţiune în faţa tuturor enunţurilor lor simbolice. Prezenţa acestui semn este suficientă pentru a arăta că orice variabilă liberă conţinută în expresia :are urmează trebuie să fie înţeleasă ca şi cînd ar fi legată printr-un :uantor universal plasat la începutul întregii expresii. în realitate, .-a susţinut că acesta este şi unicul rol util al semnului de aserţiune i că acest semn ar putea fi considerat ca o abreviere pentru „Expresia are rezultă din cea următoare atunci cînd ea este prefixată cu cuantori miversali pentru a lega toate variabilele libere este o teoremă”[8].

• W. V. Quine, *Mathematical Logic,* § 16.

Deşi utilizarea literelor pentru exprimarea universalităţii

fără ajutorul cuantorilor apare la Frege ca un instrument de abreviere, istoriceşte ea este cea mai veche utilizare a variabilelor în logică şi matematică, şi tocmai de aceea literele care apar în acest rol au fost denumite variabile reale, în timp ce cele legate prin prefixe au fost denumite variabile aparente. Marele merit al acestei notaţii constă în faptul că ea permite construirea unor enunţuri universale care pot fi manipulate în multe privinţe fără nici o grijă, ca şi cum ar fi enunţuri singulare. Probabil că acesta şi este unul dintre motivele pentru care se spune uneori că o variabilă reală denotă în mod ambiguu una din valorile sale şi mulţimea lor, adică oricare şi toate lucrurile denotate fără ambiguitate de către semnele adecvate pentru a completa locul gol marcat de către variabila reală. Felul acesta de a vorbi este nefericit, dar este adevărat că o variabilă reală poate fi tratată pentru multe ţeluri ca şi cum ar reprezenta semnele convenabile pentru locurile libere. De fapt, am şi folosit acest avantaj în utilizarea pe care am dat-o majusculelor cursive. în adevăr, singura deosebire dintre literele mari şi literele mici, folosite ca variabile reale, constă în aceea că primele sînt rezervate pentru utilizarea în enunţuri de nivelul al doilea; dar aceasta atrage drept consecinţă faptul că ele au un domeniu de acţiune maxim şi pot chiar depăşi semnele citării atunci cînd acest lucru este necesar pentru semnificaţia întregului considerat ca enunţ universal.

Dacă am încerca să formulăm o regulă ca *modus ponens* cu ajutoru iterelor mici, aceasta ne-ar putea duce la o confuzie serioasă. D< exemplu, ar fi absurd să propunem schema

p, Dacă p atunci q

deoarece, conform cu convenţia care guvernează utilizarea literelo mici, *p,* cînd apare singur într-un loc convenabil pentru o propoziţie trebuie să fie luat ca enunţ universal echivalent cu *(p}p,* adică echi valent cu aserţiunea cu privire la toate propoziţiile. Evident, variabilei de care avem nevoie pentru formularea regulii trebuie să aibă cl domeniu de acţiune întreaga propoziţie care prezintă regula, şi aceast! este la noi trăsătura distinctivă a majusculelor. în anumite context! însă, distincţia dintre minuscule şi majuscule poate fi ignorată fărl vreo pagubă. De exemplu, în matematică egalitatea I

$l_{+}2_{+}3+ ...+ _{W}= ^1'$ I

poate fi considerată ca enunţ universal cu privire la numere, d» în aceeaşi măsură o putem considera drept o schemă de validară adică enunţarea ei se poate considera ca o permisiune de a înlociH orice semn de forma l-|-2-|-3-|-... +2V' printr-un semn de forma

• -D[ac]ă punem formula ca o concluzie sau ca o premisă pentru alte cercetări în teoria numerelor, atunci o înţelegem în primul mod, dacă însă, pe de altă parte, ne referim la ea ca la ceva care sancţionează o trecere de la un enunţ în care figurează 1 + 2 -)- 3 + ... + 100 la un enunţ în care în locul corespunzător figurează $^{100^{\wedge}1\circ\circ}{}^{+}$,

o înţelegem în al doilea fel. Nu este nici un pericol în utilizarea uneia şi aceleiaşi formule în două scopuri, întrucît contextul arată destul de clar care este interpretarea cerută.

Simbolismul lui Frege este greoi nu numai datorită varietăţii de caractere pe care o pretinde, dar şi pentru că el impune aşezarea formulelor în două dimensiuni; de aceea el a fost înlocuit în prezent prin notaţii care nu pretind decît aranjarea liniară a unui număr relativ redus de semne. Sistemul acceptat de către cei mai mulţi este cel introdus de Peano în lucrarea sa *Notations de logique mathe- matique* din 1894, sistem pe care el l-a dezvoltat în ediţiile succesive ale opului său *Formulaire de mathemaiique* şi care apoi a fost perfecţionat de către Whitehead şi Russell în lucrarea lor *Principia Mathe- matica* din 1910. Dar se mai utilizează şi alte sisteme, aşa că vom prezenta acum un tabel pentru semnele principale din sistemele mai bine cunoscute, utilizînd literele mari pentru semnele de locuri goale în toate coloanele în afară de ultima, unde trebuie să păstrăm utilizarea literelor mici proprie lui Lukasiewicz, pentru a evita confuzia cu literele pe care el le foloseşte ca operatori.

	Peano-Russell	Hilbert	Variante	J.ukasiewicz
Negaţie	~P	P	-P, "IP	*Np*
Conjunctie	*P-O*	*P&.O*	*PO, PKO*	*Kpa*
Disiunctie	*pve*	*pvO*	*PO*	*Apa*
Conditional	*P^O*	*P — O*		*Cpa*
Biconditional	*P^O*	*P~O*	*P~O*	*Epa*
Cuantificare				

universală		*(*}F(x)*	*yxF(x}, \xF(x)*	*nx$>x*
Cuantificare existenţială	(3*)FW	*(Ex) F(x)*	*3xF(x), yxF(x)*	*T,x<bx*

'uncţia de adevăr, care în lista de aici figurează sub denumirea de mdiţional, este, desigur, condiţionalul lui Filon.

Pentru a reduce la minim întrebuinţarea parantezelor (sau, ceea ; este echivalent, întrebuinţarea punctelor groase), cei care utilizează notaţiile care apar în primele trei coloane ale tabelei de mai sus au convenit ca semnul negaţiei (atunci cînd este imprimat înaintea altora) să fie înţeles în sensul că operează numai asupra expresiei care îl urmează imediat, cazul contrar trebuind să fie arătat cu ajutorul parantezelor; de asemenea, s-a convenit că conjuncţia, disjuncţia, condiţionalul şi bicondiţionalul leagă în această ordine de tărie; adică dacă dorim, putem scrie

~ P Qy R S = T

în loc de

{[(~ P-Q) y R] S} = T.

Utilizarea semnului lui Hilbert pentru negaţie face posibilă omiterea unor paranteze, deoarece lungimea barei suprapuse arată destul de clar întinderea expresiei care urmează să fie negată ; alte mici economii s-au realizat scriind *(x)Fx* sau *|fxFx* în loc de (x) *[F(x)*], unde domeniul de acţiune al cuantorului constă exclusiv în semnul funcţional care îi succede imediat. Dar, chiar şi aşa, nevoia de paranteze poate aduce complicaţii, şi acesta este un motiv puternic pentru a încerca un procedeu de notaţie care să nu pretindă deloc parantezele. Aceasta: a făcut-o Lukasiewicz. Fiecare dintre literele mari, pe care el la utilizează în calitate de conective sau operatori, precede simbolurile la care se aplică, şi, întrucît numărul acestora este clar din definiţia operatorului, nu încape ambiguitate pentru interpretările formuleloi corect formate. De exemplu, *CKCpqpq* se poate citi doar ca o formă echivalentă pentru [(/> *q) • p*| *~=> q,* deoarece al doilea *C* poate să fie aplicat numai la două simboluri complete, care trebuie să fie neapărat literele alăturate *p* şi *q,* iar *K* pretinde la fel două simbolur complete, care trebuie să fie neapărat simbolurile alăturate *Cpq* ş *p.* însă acest avantaj se obţine pe seama unei distanţări radical de construcţiile utilizate în limbajele uzuale şi de aceea el trebui să fie plătit printr-o dificultate la citire. Fără îndoială că în practic: dificultatea poate fi

depăşită, dar majoritatea logicienilor s-au mulţu mit să folosească notaţii care pretind paranteze, iar în cele ce urmeaz noi vom folosi numai cea mai cunoscută, adică notaţia lui Peanc Whitehead şi Russell, însă însoţită de regulile cu privire la variabil pe care le-am prezentat în această secţiune.

O modificare mult mai radicală—şi care tinde mult mai departe — simbolismului logic a fost propusă în 1924 de către M. Schonfinkel

’ ,,tlber die Bausteine der mathematischen Logik”, *Maihematische Annalen,* XC (1924), pp. 305—316. A se vedea şi traducerea în limba română. *Despre elementele cons tutive ale logicii matematice,* în *Logică şi filozofie,* pp. 105 — 118, Editura politică, Bucureş 1967. Pentru dezvoltări ulterioare a se vedea H. Curry şi R. Feys, *Combinatory Loţ* (voi. I, 1958).

Ea a dat naştere la un mod cu totul nou de a considera logica, şi, ca atare, i s-ar fi putut rezerva o secţiune specială, dar noi o vom prezenta aici deoarece nu putem spera decît să indicăm trăsăturile cele mai interesante ale acestui simbolism nou.

Schonfinkel începe prin a arăta că tentativa lui Sheffer de a reduce numărul de constante logice poate fi continuată cu un pas mai departe dacă introducem *Fx|*Gx* în sens de (x) ~ *(Fx • Gx).* într-adevăr, este evident că semnul *x* trebuie să însemne acelaşi lucru ca şi bara simplă atunci cînd apare între expresii care .amîndouă nu conţin nici un *x* liber; iar dacă i se permite să apară între expresii care conţin un *x* liber, atunci se poate folosi pentru a forma expresii echivalente cu toate expresiile cuantificate din logica generală. însă el susţine mai departe că a descoperit o cale de simplificare a simbolismului logic cu mult mai drastică, cea care înlătură toate variabilele, fie ele propoziţionale, funcţionale sau individuale. Variabilele care se utilizează de obicei pentru scrierea formulelor logice nu sînt decît semne auxiliare pentru a marca referirile indirecte, şi dacă putem găsi o altă cale pentru această cerinţă le putem abandona cu totul. Fără îndoială că utilizarea variabilelor va continua în practică, dar din punct de vedere teoretic este interesant de văzut cum pot fi ele eliminate.

După Schonfinkel, trebuie în primul rînd să extindem noţiunea noastră de funcţie astfel încît să permitem ca valorile variabilelor şi valorile funcţiilor să fie ele înseşi funcţii. Atunci, pentru *F(x,y)* putem scrie *(Fx)y* sau mai pe

scurt *Fxy,* concepînd *Fx* în acest complex ca un semn pentru o operaţie care ea însăşi este rezultatul aplicării operaţiei al cărui semn este *F* la un argument al cărui semn este *x.* Dacă parantezele nu arată cumva contrariul, atunci se presupune că operaţia indicată de primul semn se aplică la obiectul indicat le al doilea semn, iar rezultatul astfel obţinut este aplicat la obiectul ndicat de-al treilea semn şi aşa mai departe. Acum introducem cîteva uncţii (operaţii) speciale, pe care le definim prin următoarele egalităţi:

(1) |*x = x*
(2) *Cxy = x*
(3) *Tfxy =fyx*
(4) *Zfgx=f(gx)*
(5) *Sfgx=fx(gx).*

dci I înseamnă operaţia de identitate care lasă neschimbat argu- îentul respectiv, C este funcţia de două argumente a cărei valoare ste totdeauna egală cu primul dintre argumentele ei, T este operaţia e inversare a succesiunii argumentelor unei funcţii (adică ceea ce i teoria relaţiilor se numeşte de obicei conversiune), Z este operaţia de compunere a funcţiilor cu ajutorul căreia, de exemplu, noţiunea de unchi este compusă din noţiunile de frate şi părinte, iar S est» funcţia de trei argumente a cărei valoare se calculează lăsînd primu şi al doilea argument să opereze separat pe cel de-al treilea, iar apo lăsînd ca rezultatul primei operaţii să opereze rezultatul celei de-; doua. Dintre aceste cinci funcţii, a doua şi a cincea sînt conceptel» cele mai puţin familiare, dar ele sînt de un interes deosebit, pentri că celelalte trei funcţii se pot defini cu ajutorul lor prin următoarei» egalităţi:

I = SCC
Z = S(CS)C
T = S(ZZS)(CC).

De exemplu, avem:

Z/gx = S(CS)C/gv
= CS/(C/)gx
= ˢ'.C/)g*
= cA(gx)
= /(£*)■

Acum, dacă scriem U/g ca o abreviere pentru *fx|* gx,*

putem exprim; orice truism logic prin intermediul doar a trei semne: C, S şi U fiecare variabilă intervenind doar odată, şi anume la sfîrşitul formulei de unde poate fi înlăturată dacă nu este esenţială pentru fixare; semnificaţiei întregii formule. Se poate omite chiar U însuşi deoarece şi intrările sale se pot reduce la una singură la sfîrşit, unde unicu ei rol se rezumă la acela de a arăta că ceea ce scriem ţine de logică Ceea ce este particular în fiecare truism poate fi deci exprimat printr-< simplă aranjare a două semne: C şi S. De exemplu avem:

*P|X(P|*P) = upiupp)*
= U/>(U/>(C/>(C/>)))
= U/>(U/>(SCC/>))
= U/>(SU(SCC)/>) = SU(SU(SCC))/>
= SU(SU(C(SCC)U))/> = SU(SS(C(SCC))U)/> = SS(SS(C(SCC)))U/>.

Introducînd o nouă funcţie particulară D pe care o definim dire< prin egalitatea

Dfx - fxx

sau indirect (adică cu ajutorul lui C şi S) prin egalitatea

D = SS(CI)
= SS(C(SCC)),

putem reduce întreaga expresie de mai sus la SSD. Dar niciodată nu s-a pretins că logica combinatorie, aşa cum se numeşte în prezent acest domeniu de cercetare, ar oferi formule de mare claritate intuitivă. Pînă în prezent, tehnica lui Schonfinkel este importantă mai cu seamă pentru lumina pe care o aruncă asupra rolului variabilelor şi a noţiunii de substituţie în simbolismul logicii matematice. Se prea poate ca ea să se dovedească utilă şi în analiza exactă a tiparelor limbajelor obişnuite, dar deocamdată aceasta este o simplă conjectură.

2. *Metode de prezentare: axiome şi reguli*

în simbolismul modern, prima mulţime de axiome propusă de Frege pentru logica generală (fără teoria identităţii) se poate rescrie după cum urmează:

(1) *p (q => p)*
(2) *[p => (q = r)] = [(p = q) (P r)]*
(3) *IP (q* r)J *[q => (P => r)J*
(4) *(P => q) q => ~ P)*
(5) ----*p* o *p*
(6) *p = ~ ~ p*
(7) (x)/(x) ^/(j).

lîn. *Begriffsschrift,* el spune că utilizează doar un singur principiu de inferenţă pentru derivarea teoremelor din aceste axiome, dar im văzut că de fapt el foloseşte patru principii de inferenţă. Dintre îcestea, (I) este un principiu de substituţie pentru variabile reale, isemănător cu cel din regula (9) din lucrarea sa *Grundgesetze,* iar celelalte trei corespund cu următoarele scheme:

H) (III) TW

IV) $\frac{p \to F(x)}{P \Rightarrow (x)F(x)}$ d cu condiţia ca *x* să nu intervină liber în *P.*

Majoritatea logicienilor de mai tîrziu au inclus în sistemele lor axiome sau reguli foarte apropiate de (7), (III) şi (IV), deşi (III) — după cum vom vedea mai tîrziu — este redundantă. Dar logica primară, care este determinată prin (1) —(6), (I) şi (II) a fost prezentată în diferite moduri sub denumiri ca „teoria deducţiei", „calculul propoziţiilor", „teoria propoziţiilor elementare", „teoria funcţiilor de adevăr" şi „teoria compunerii enunţurilor". Aceste variaţii în ce priveşte prezentarea merită atenţie, deoarece cel puţin unele din ele sînt importante pentru filosofia logicii.

Am văzut deja că a treia dintre axiomele lui Frege este redundantă, întrucît ea poate fi derivată din primele două. Dacă aceste două sînt prezente, atunci putem să înlocuim ultimele trei printr-o singură axiomă nouă relativă la negaţie, şi anume:

$$(\sim p = \sim_q) \text{ o } (? \text{ o } p).$$

Şi mai interesantă este posibilitatea de a înlocui toate axiomele lui Frege pentru logica primară prin următoarea mulţime completă de trei axiome :

(1) (/>=>?) [3] [(? => *r) (p =>* r)J

(2) (~ *p = p) p*

(3) *p = (~ p = q).*

Interesul este cu atît mai mare cu cît prima dintre aceste trei este principiul tranzitivităţii pentru conexiunea condiţională a lui Filon, a doua este o versiune a principiului *consequentia mirabilis,* cart a fost formulat pentru întîia oară de către stoici, iar a treia axiomă este o formulare nouă a uneia dintre tezele paradoxale care erau atribuite lui John Duns Scottus, şi anume că orice propoziţie poate fi derivată dintr-o conjuncţie autocontradictorie. Aceste descoperiri şi cîteva alte rezultate foarte interesante (cum ar fi acela că este suficientă o singură axiomă, deşi nu prea clară din punct de vedere intuitiv) se datorează toate lui Lukasievicz şi şcolii sale care, începincl din anii 20 ai secolului nostru, a cercetat minuţios logica primară, cu referire specială la sistemele bazate pe cele două noţiuni primitive ale lui

Frege: negaţia şi condiţionalul lui Filon[††††††††††††††††††††††††††††††††]. Dar sistemul care a atras cel mai mult atenţia în veacul nostru nu este cel al lui Frege, ci sistemul din *Principia Mathematica.*

Ca şi Frege, Whitehead şi Russell au lucrat cu două principii de inferenţă pentru logica primară: principiul substituţiei şi principiul detaşării (adică *modus ponens* pentru condiţionalul lui Filon), dar ei au considerat ca primitive noţiunile de negaţie şi disjuncţie şi au dat următoarea mulţime de axiome:

(1) *(p* V *P)* [23] *P*
(2) *q* [23] *(P V q)*
(3) */>* V *q) (q* V *p)*
(4) *[jp* V *(q* V r)] [23] [(? V *(PV* y)]
i (5) *(q =>') =>* [*(/>* V *q)* (/> V r)].

In 1926, Bernays a arătat că (4) se poate deriva din celelalte şi era, îşadar, superfluă[9]. însă, în afară de aceasta, acest binecunoscut sistem prezintă o anumită lipsă de eleganţă. Dacă luăm ca primitive lemnele negaţiei şi disjuncţiei, atunci tot ele ar trebui să fie utilizate lentru formularea axiomelor şi regulilor de inferenţă, excluzînd de lici toate celelalte semne. Desigur că în acest sistem am putea înlocui ieste tot P => *Q* prin ~ *p* V *Q,* dar dacă procedăm în acest fel, atunci xiomele şi regulile rezultate ar fi întrucîtva mai complicate decît ele din sistemele lui Frege şi Pukasiewicz.

După cum am văzut în capitolul cu privire la algebra logicii, Peirce i Scheffer şi-au dat seama de posibilitatea de a defini negaţia şi oate conectivele logicii primare cu ajutorul unei singure noţiuni rimitive. în 1917, Nicod, luînd ca nedefinită expresia P/Q (cu îmnificaţia : *nu atît P cît şi Q)* arăta că întregul calcul s-ar putea aza pe o singură axiomă

[/W]|([W)]I {(s|?)|[(/>|s)|(/>|s)]})

i

$$\frac{P\ P|(Q|R)}{R}$$

regulă de inferenţă în locul regulii tradiţionale *modus*

†††††††††††††††††††††††††††††††† J. Lukasiewicz şi A. Tarski ..Untersucliungen iiber den Aussagenkalkiill, *Comple rendus des seances de la Societe des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III,* voi XXIII (1930), pp. 30 — 50. Rezultatele acestei şcoli sînt expuse pe larg în cartea lu A. N. Prior, *Formal Logic.*

ponens[10]. introducerea sa la ediţia a doua din *Principia Mathematica,* publi- tă în 1925, Russell a propus ca această formulare să ia locul sistemu- din prima ediţie, dar ar fi greu să spunem că reducerea realizată către Nicod ar fi o simplificare care uşurează asimilarea teoriei.

[1] „Axiomatische Untersucliungen des Aussagenkalkiils der *Principia Mathematica", thematische Zeitschrift,* XXV (1926), pp. 305 — 20.
[0] "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic," *Pmceedings <ie Cambridge Philosophical Society,* XIX (1917), pp. 32 — 41.

Dacă ceea ce se urmăreşte este claritatea şi naturaleţea prezentării argumentelor, cea mai bună mulţime de axiome de utilizat împreună cu principiile de substituţie şi detaşare este cea dată de către Hilbert şi Bernays în 1934[u].

I.
(1) *P => (? = P')*
(2) *[p => (p = ?)] => (/> = ?)*
(3) *(P => q) => [(? =>r) => (p* r)]

II.
(1) *p ■ q => p*
W p ■ q => q
(3) (/> => ?) = [(/>=') *q • ')]*

III.
(1) *p => PV q*
(2) *q =>p|J q*
(3) (/> = r) => [(? = *r) => (p V q* = r)J

IV.
(1) *{p = q) (p = q)*
(2) *(p = q)=>(q=> p)*
(3) (y> = ?) = [(? = />)=(/> = ?)]

V.
(1) *(P ?) => (~ q ~ P)*
(2) *p^ ~ ~ p*
(3) -----*p => p.*

Aici axiomele se grupează la un loc după semnele care figurează îi ele. Mai întîi apar axiomele în care figurează numai semnul con diţionalului filonian, apoi acelea care cuprind, pe lîngă acest semn şi semnul conjuncţiei şi aşa mai departe. Locul privilegiat al semnulv condiţional care figurează ca unic semn în grupa întîi şi ca unul di cele două semne în fiecare din celelalte grupe se datorează, desigu: faptului că el intervine şi în regula detaşării. Dacă avem aceast regulă, fiecare axiomă ia locul unei reguli adiţionale de inferenţi De exemplu, prima axiomă are aceeaşi putere ca şi regula cu schen

Q = P

E adevărat că în acest sistem numărul axiomelor este mare; d aceasta nu prezintă un dezavantaj, deoarece fiecare semn distinct se introduce într-un fel care poate fi uşor înţeles, de exemplu semn disjuncţiei printr-o grupă de trei axiome duale celor trei axiome *i* conjuncţiei. După dorinţă, se poate reduce numărul axiomelor, del nind unele semne cu ajutorul altora; dar aici nu avem vreun cîştH

[11] *Grundlagen der Mathematik,* I, p. 66.

eal, deoarece de fapt o definiţie nu este decît un cuplu de reguli de rferenţă care leagă semnul definit de unul nedefinit. Aşa cum sînt le, aceste axiome sînt toate independente şi este interesant de notat ă: 1(1), V(l), V(2) şi V(3) provin din sistemul lui Frege, 1(3) din istemul lui Lukasiewicz, iar 111(5) din *Principia Mathematica.*

în toate aceste sisteme, pentru derivarea teoremelor din axiome ste necesar un principiu de substituţie. Faptul că un asemenea prin- ipiu poate fi formulat riguros este incontestabil, dar se pare totuşi ă ar fi impropriu de a pune ceva de acest gen ca o regulă a logicii pri- rare în acelaşi rînd cu regula detaşării. Atunci cînd derivăm un enunţ in altul printr-un proces de substituţie, validitatea inferenţei noastre epinde de universalitatea premiselor, dar în logica primară obiectul e studiu este raţionamentul care nu cuprinde noţiunea de genera- tate şi de aceea este neadecvat ca axiomele unei asemenea teorii ă fie propoziţii universale. Aceasta nu înseamnă că în logica primară jgicianul trebuie să se abţină de la orice generalizare şi să se limiteze i exemple. în calitate de logician, el poate furniza enunţuri univer- ale; dar în această porţiune a lucrului său, aceste enunţuri ar trebui ă fie numai de ordinul al doilea, ca de exemplu enunţul că este validă rice argumentare după schema

$$\frac{P \quad P \hat{} Q}{Q}$$

n particular , atunci cînd vorbeşte despre axiomele logicii primare, nu trebuie să presupună, cum a făcut Frege, că acestea trebuie să e universale şi în număr finit, ci trebuie mai curînd să fie pregătit i admită ca axiome orice propoziţii care au înfăţişarea unor forme ilide, cum ar fi de exemplu forma *P (Q P),* care corespunde i prima axiomă a lui Frege *p => (q => p).* Acest procedeu de a da heme de axiome mai curînd decît axiome se datorează lui J. von eumann[12], dar se poate spune că el realizează intenţia iniţială a i Frege de a prezenta logica, sau cel puţin logica primară, cu ajutorul ei singure reguli de inferenţă. Din nefericire, această simplificare . oferă vreun avantaj *practic* celui care utilizează logica, deoarece rcina de a determina cînd anume poate fi un enunţ admis ca axiomă, scită cu această nouă dispensă exact aceleaşi dificultăţi ca şi aceea a determina cînd anume un enunţ

poate fi derivat dintr-o axiomă pă vechiul sistem. Dar reforma are marele merit filosofic de a de- irca în mod clar enunţurile de ordinul întîi de enunţurile de ordinul doilea.

[1] „Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift,* XXVI (1927), pp. 16

Probabil că Frege şi cei care l-au urmat în utilizarea principiult substituţiei au fost influenţaţi de analogia cu algebra, unde, dup cum am văzut, una şi aceeaşi formulă poate fi utilizată uneori c enunţ universal cu privire la numere şi alteori ca o permisiune de- face anumite transformări. Dar ei declară uneori că expresia univei salităţii cu ajutorul variabilelor libere este doar o abreviere pentri exprimarea universalităţii cu ajutorul variabilelor legate; şi dac: acest mod de a descrie notaţia este luat în serios, atunci teoria logici devine mult mai complicată decît au admis-o ei în prezentările lo iniţiale. într-adevăr, dacă formula axiomă *p (q p)* trebuie s; fie înţeleasă ca fiind o abreviere pentru (/>)(?) *[p => {q => />)*], atunc cel mai simplu caz de derivare va fi de fapt o aplicare a unei regul de logică generală corespunzătoare cu schema • însă singurel

concluzii pe care le putem obţine prin această metodă sînt enunţur ca *Pămîntul este plan => {Luna este o bucată de brînză verde => Pămîn tul este plan),* adică exemplificări ale principiului nostru logic pe ui material non-logic, iar logicienii care utilizează principiul substituţie nu se interesează de obicei de rezultate de acest fel. De cele mai mult< ori, teoremele pe care ei vor să le stabilească prin substituţia varia bilelor sînt noi enunţuri universale cum ar fi *r-s => (~ t => r -s)* enunţ care nu se poate deriva prin aplicarea regulii simple menţio nate mai sus, ci pretinde un raţionament mult mai complicat dir logica generală. Fără îndoială că procedura necesară se poate formaliz; riguros[13], dar este mai intuitiv să adoptăm instrumentul lui von Neu mann al schemelor de axiome şi să argumentăm după cum urmează : i Orice enunţ de forma *P => {Q P)* este necesarmente adevărat Dar orice enunţ de forma *R-S => (~ T => R-S)* este de form *P => {Q => P).*

Prin urmare, orice enunţ de forma *R-S ^>{~T^ R-S)* est necesarmente adevărat.

* Indubitabil, acest raţionament depinde de un principiu

din logic generală (principiul silogistic *Barbara),* dar în acest context el est incontestabil, deoarece nu poate fi îndoială că ţine mai degrabă c o argumentare asupra logicii primare decît de însăşi logica primar Consideraţii similare se pot aduce împotriva prezentării lui Freg a utilizării variabilelor funcţionale în formularea axiomelor penti logica generală. Dacă formula *{x)f{x) => f{y)* trebuie să fie înţelea

[ia] Problema a fost examinată serios pentru prima oară de către S. Lesniewski. P zentarea cea mai accesibilă a logicii sale se poate găsi în lucrarea sa „Grundziige eii neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Fundamenta Mathematica, X* (1929), pp. l-81.

ca o abreviere pentru (/) [(x)/(x) [3] /(j')J, atunci este imposibil să prezentăm teoria funcţiilor de nivelul întîi fără a utiliza teoria funcţiilor de nivelul al doilea. în rezumat, unicul mod de a clarifica articulaţiile teoriei logicii constă în utilizarea unor variabile speciale cum ar fi literele noastre mari, pentru a exprima generalitatea din discursul logicianului spre deosebire de generalitatea pe care acesta o analizează.

Trebuie însă să recunoaştem că orice referire la axiomele logicii, fie că acestea sînt în număr mic ca în sistemul lui Frege, fie că sînt o infinitate ca la von Neumann, are ceva bizar. înainte de Frege, logicienii considerau că sarcina lor este să examineze cum rezultă teoremele din axiome în domenii ca geometria, dar în mod obişnuit ei nu încercau să prezinte logica însăşi ca sistem deductiv cu propriile sale axiome şi teoreme. Desigur, nu Frege a fost primul care a susţinut că anumite principii logice se pot deriva din altele. Aristotel reducea şi el toate silogismele valide la *Barbara* sau *Celarent,* iar Hrisip deducea Ilurile complexe din cele pe care le considera nedemonstrabile.

■, urmînd unele propuneri ale lui Leibniz şi Boole, Frege oferea un em în care axiomele şi teoremele nu sînt adevăruri cu privire la i ce urmează din ceea ce este dat, ci truisme logice cu acelaşi statut legea necontradicţiei sau legea terţului exclus. Dacă dorim să uti- m logica sa pentru construirea unui sistem deductiv de tipul obiş- t, adică a unui sistem deductiv în care axiomele nu sînt truisme ce, atunci trebuie mai întîi ca la stocul nostru de axiome să adău- 1 axiomele sale, în calitate de premise suplimentare, iar apoi să răm toate inferenţele în conformitate cu principiul substituţiei, icipiul detaşării sau cu una din cele două reguli ale lui Frege pentru onamentul cu cuantori. Este adevărat că atunci cînd a

pornit scrie *Grundgesetze,* Frege a decis, pentru motive de convenienţă :tică, să adopte noi tipare de inferenţă, care să-i permită să se >enseze de toate axiomele sale pentru logica primară, cu excepţia i dintîi, dar el nu a explicat niciodată în mod clar de ce are în ?ral nevoie logica de axiome. Poate că iar după Whiteliead Russell considerau că este firesc să aibă anumite axiome, irece altfel n-ar fi avut sens să afirme că aritmetica este L-zvoltare a logicii. Dar, oricum ar fi, după o scurtă perioadă în : programul de prezentare a logicii întregi ca sistem deductiv >st acceptat fără obiecţii, logicienii şi-au dat seama că truismele logica primară pot fi certificate ca atare, fără derivare din me.

aza noii metode este enumerarea sistematică a posibilităţilor de văr pentru un număr de propoziţii simple, adică enumerarea iror combinaţiilor posibile de valori de adevăr pentru aceste pro-

poziţii, Astfel, pentru o propoziţie avem două posibilităţi, pentru două avem patru posibilităţi şi, în general, pentru *n* propoziţii avem 2" posibilităţi. Cu ajutorul unui tabel care arată cele două posibilităţi pentru o singură propoziţie putem defini negaţia punînd *P* ~*P* pur şi simplu sub ~*P* „f" acolo unde sub *P* se află „a" şi „a" acolo unde sub *P* se află „f". în antichitate. Filon a f din Megara aplica aceeaşi metodă atunci cînd prezenta f a enunţurile condiţionale. El spunea că orice asemenea enunţ era adevărat dacă sau antecedentul şi consecventul erau amîndouă adevărate, sau antecedentul era fals şi consecventul adevărat, sau antecedentul şi consecventul erau amîndouă false, dar că enunţul era fals dacă antecedentul său era adevărat iar consecventul său fals. Aceasta conduce la o definiţie a conectivului „dacă" asemănătoare cu cea pentru semnul lui C răsturnat, în următoarea succesiune de definiţii tabulare:

PQ	*PQ*	*P*	*P* =>*Q*	*P* = *Q*
a a	a	a	a	a
a f	f	a	f	f
f a	f	a	a	f
f f	f	f	a	a

asemenea de posibilităţi nu s-au

Dar, după cîte ştim, în formă tabulară decît abia în secolul trecut, atunci cînd Boole le-< utilizat pentru a explica procesul de dezvoltare prin care orice expresii din sistemul său se poate transforma într-o sumă de produse (adie! o disjuncţie de conjuncţii) ; Frege a utilizat tabelele în mod explici pentrp definiţia diferitelor funcţii de adevăr. Dacă luăm în consida rare două şi numai două propoziţii (aşa cum am procedat în defini ţiile de mai sus), *Q*~ posibilităţile pot fi reprezentate prii diferitele a f locuri dintr-o matrice pătrată ca aceea arătat] aici, iar definiţia se construieşte completînd aceste locul într-un mod convenabil, dar tabularea în linii are avan tajul că se poate aplica la orice număr de propoziţii

Începînd cu cel mai simplu tabel al posibilităţilor, care este suficiei pentru definirea negaţiei, deoarece negaţia este o funcţie de adev; de un singur argument, putem construi fiecare tabel mai complici rescriind tabelul imediat precedent de două ori, o dată cu „a" în fa fiecărei linii şi apoi cu „f" în faţa fiecărei linii. Sînt posibile — s-au utilizat — şi alte aranjări, dar esenţial este să urmăm un

I se poate folosi apoi pentru calcul, aşa cum se va eJ plică acum. I deu regulat care să ne dea certitudinea că fiecare combinaţie de valori de adevăr apare o dată şi numai o dată. După cum se vede, în exemplele noastre am folosit pentru argument numai literele mari. Se poate susţine că construcţia definiţiei tabulare a unei funcţii de adevăr este de fapt formularea simultană a unui număr de reguli de inferenţă. De exemplu, construcţia definiţiei tabulare pentru conjuncţie este echivalentă cu formularea regulilor exprimate prin următoarele trei scheme de inferenţă :

P	*Q*	*R*
a	a	a
a	a	f
a	f	a
a	f	f
f	a	a
f	a	f
f	f	a
f	f	f

P Q *P-Q* *'P-Q*

p.Q *p* *Q*

în adevăr, pentru a obţine oricare din aceste trei scheme din definiţia tabulară, ajunge să privim liniile în care premisa sau amîndouă premisele, după cum e cazul, se asociază cu „a" verificînd că în toate aceste linii concluzia este „a".

Nu este greu de găsit în lucrarea lui Boole ideea că o propoziţie necesar adevărată trebuie să se dezvăluie ca atare în procesul dezvol- ării sale, dar abia pe la 1920 diferiţi logicieni, lucrînd în mod indepen- ient, au definit funcţiile de adevăr cu ajutorul tabelelor de adevăr ;i au constatat astfel că un calcul simplu este suficient pentru a deter- nina ori de cîte ori o propoziţie complexă exprimată cu ajutorul emnelor funcţiilor de adevăr este cu necesitate adevărată, cu nece- itate falsă sau contingenţă. Cea mai bună prezentare cunoscută a cestei *proceduri de decizie* pentru logica primară este probabil acea ată de L. Wittgenstein în *Tractatus Logico-Philosophicus,* publicat entru întîia dată în 1921, dar o discuţie mai amănunţită a acestei ;hnici apare într-un articol publicat de E. L. Post în acelaşi an [14].)rept exemplu, să considerăm verificarea primei axiome a lui Frege, iu mai bine zis a schemei de axiome corespunzătoare.

		(1) *p*	(3) ZD	(1) (<?	(2) z>	(1) *P)*
p	*Q*					
a	a	a	a	a	a	a

a	f	a	a	f	a	a
f	a	f	a	a	f	f
f	f	f	a	f	a	f

[11] "Introduction to a General Thcory of Elementary Propositions", *The American trnal of Mathematics,* voi. XLIII (1921), pp. 163 — 185. La acea dată, metoda era loscută şi lui îjukasiewicz.

Trebuie să distingem aici exact patru cazuri posibile, deoarece avem de-a face numai cu două argumente. Pentru a atribui o valoare de adevăr consecventului din schemă în fiecare din cele patru cazuri e necesar doar să consultăm definiţia tabulară a condiţionalului filonian, care este desigur o specificare a condiţiilor pentru fals, iar după ce s-a realizat această operaţie, indicată prin (2), o a doua aplicare a aceleiaşi definiţii, indicată prin (3), este suficientă pentru a arăta că schema în ansamblu furnizează valoarea „adevărat" în toate circumstanţele posibile, adică, după cum spune Wittgenstein, este o schemă tautologică.

Evident, metoda poate fi aplicată în mod mecanic (adică literalmente de către un mecanism) pentru orice formulă construită cu ajutorul funcţiilor de adevăr din logica primară, iar atunci cînd ea furnizează răspuns afirmativ, validitatea rezultatului nu depinde de corectitudinea vreunei formule anterioare aleasă pentru a servi ca axiomă. Dar ar fi o greşeală să presupunem că metoda pretinde doar definiţii arbitrare pentrul semnele funcţiilor de adevăr. Descoperirea că aplicarea definiţiilor furnizează „a" sub conectivul principal al unei formule în toate liniile tabelului nostru conduce la o demonstraţie a adevărului necesar al formulei respective numai dacă am stabilit anterior că liniile tabelului epuizează toate posibilităţile în ce priveşte adevărul sau falsul propoziţiilor care sînt argumentele funcţiei de adevăr pe care o exprimi formula în cauză. Faptul că un tabel construit în chipul explicat ma sus epuizează în adevăr posibilităţile este evident, dar numai pentri cineva care înţelege principiul construcţiei şi îşi dă seama că fiecare propoziţie trebuie să fie sau adevărată, sau falsă.

Metoda tabelelor de adevăr pentru certificarea truismelor s-a putea considera ca o rafinare a tehnicii lui von Neumann, deşi ea est anterioară acestei tehnici. în loc de a specifica un număr de schem de axiome, putem utiliza cuvîntul „tautologie" ca o descriere generali deşi nu efectivă, a tuturor propoziţiilor care urmează să fie admis ca axiome în logica primară. Tocmai aceasta este procedura pe cai o urmează W. V. Quine în a sa *Mathematical Logic*[16]. Dacă se

obie- teză totuşi că nu este propriu-zis sarcina logicianului de a certific truismele ca atare, indiferent dacă o face prin metoda lui Frege ss prin orice altă procedură modernă, ci că sarcina lui este mai curii de a formula principiile de inferenţă care sînt valide pentru toa cercetările posibile, atunci putem adapta prezentarea tabelelor < adevăr pentru a veni în întîmpinarea acestui deziderat. în adevl a spune că o propoziţie atrage după sine alta înseamnă a spune orice stare de lucruri posibilă care ar putea fi considerată ca o verii

---

“ § 16, *100. care pentru prima ar trebui să fie considerată ca o verificare pentru a doua, fapt ce se poate citi din tabelele de adevăr, dacă implicaţia aparţine logicii primare. De exemplu, se poate vedea că în fiecare linie în care sub capul *P Q* din tabelul definiţiilor apare „a”, sub capul *P V Q* apare de asemenea „a”. Am putea în adevăr să luăm implicaţia sau necesitatea relativă ca noţiune de bază pentru a fi exprimată cu ajutorul tabelelor de adevăr şi să spunem că toate truismele, adică propoziţiile absolut necesare, sînt tocmai propoziţiile implicate de orice altă propoziţie. Am văzut deja că definiţiile tabulare ale funcţiilor de adevăr pot fi interpretate ca formulări succinte ale unor reguli şi se pot spune multe în favoarea acestui punct de vedere; în primul rînd pentru că el concordă cu concepţia tradiţională a logicii şi, în al doilea rînd, pentru că noţiunea de definiţie implicită cu ajutorul regulilor de inferenţă se poate aplica şi în acea parte a logicii generale care nu poate fi prezentată cu ajutorul tabelelor de adevăr. în anumite privinţe, o propoziţie universală seamănă cu o conjuncţie iar una existenţială cu o disjuncţie, numai că domeniul posibilităţilor din care alegem atunci cînd formulăm o propoziţie generală de un fel sau altul poate fi infinit, iar atunci cînd lucrurile stau aşa, tehnica tabulării nu se mai poate utiliza.

în lucrarea sa *Logische Syntax der Sprache*[18] (publicată pentru întîia oară în 1934) R. Carnap a făcut observaţia edificatoare că nu este deosebire de principiu între logicienii care folosesc pentru logică atît reguli cît şi axiome şi cei care oferă doar reguli de inferenţă. După _um a observat el,

orice formulă care trebuie luată axiomatic urmează >ă fie prezentată împreună cu explicarea rolului el, iar această explicare conduce de fapt la o regulă în cadrul căreia propoziţia pe care) exprimă formula respectivă se poate infera din orice propoziţie dată, au, în terminologia tehnică a lui Carnap, din clasa nulă a premi- elor, care este partea comună a tuturor claselor de premise. Pe scurt, ogica este în esenţă o ştiinţă care constă din principii de ordinul al oilea.

Dacă combinăm această propunere cu instrumentul schemelor e axiome introdus de către von Neumann, putem lua ca o alternativă i versiunea logicii dată de către Frege în lucrarea sa *Begriffsschrift* rmătorul ansamblu de 6 reguli:

$$\frac{1 \quad {}^{p}}{2.\ \dfrac{Q}{\blacklozenge}}$$

$$P \Rightarrow (0 = P)$$

>• §§ 31 şi 47.

3. [P = (0 => P)] = [(P = 0) => (P => *VI*

4. ---
(~ P Z5 ~ 0) => (0 = P)

5. - ---
{x)Fx=> FY

6. *p gg* / *p => (x)Fx*, cu condiţia[t] ca *x* să nu apară liber în *P.*

în acest sistem, asteriscul tipărit deasupra liniei în unele scheme de inferenţă marchează un loc unde putem aşeza orice premisă dorim, astfel îneît introducerea sa echivalează cu enunţarea faptului că propoziţiile din schemele indicate sub linia acestor scheme de inferenţă pot fi asertate fără nici o condiţie. Dacă nu ne place acest fel de a vorbi, îl putem urma pe von Neumann, care descrie asemenea propoziţii ca axiome; dar în afară de alte considerente, denumirea pare cît se poate de nefericită, deoarece în mod obişnuit se consideră că axiomele trebuie să fie independente unele de altele, în timp ce aceste propoziţi nu pot fi independente una de alta, odată ce avem *modus ponens.* Dacă de exemplu, *R* şi S sînt semne propoziţionale oarecare, regula (2 de mai sus ne permite, printre altele, următoarele trei aserţiuni

R => (S = *R)*

(S => R) P [2? => *(S* 7?)]

=> *(S =>* 2?)] => {(S => *R) => [R => (S =>* 2?)]}.

A doua dintre acestea se poate infera din prima şi a treia prin regula (1) De aceea este preferabil să ne mulţumim a denumi asemenea aserţiun *truisme* logice.

Atunci cînd aplicam logica la un domeniu de studiu extralcgie literele mari din schemele noastre de inferenţă trebuie înlocuite pri expresii proprii pentru propoziţii privitoare la obiectul de studi respectiv, iar apoi se pot trage înferenţele permise de către regul Dar atunci cînd ne ocupăm cu elaborarea logicii însăşi, ţelul nosti nu este de a deriva consecinţe din premise care aparţin unei alte ştiinţei doar de a deriva din regulile de inferenţă de la care pornim reguB noi, eventual mai complicate. Deoarece regulile sînt aserţiuni de ordB nul al doilea, care se pot aşeza în forma

unor principii cu privire ■ relaţiile dintre propoziţii, derivarea regulilor din reguli trebuie » cuprindă principii de ordinul al treilea, dar ea poate fi totuşi prezentată într-un mod simplu cu ajutorul procedeului de deducţie schematică pe care l-a folosit Hrisip cînd şi-a elaborat logica elementară. Iată *Fx*
de exemplu o demonstraţie a regulii simple pe care am adop-
(x)Fx
tat-o la această procedură după demonstraţia iniţială a lui Bernays‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡:

$$\frac{\dfrac{Fx \qquad Fx \Rightarrow \{[R\ z > (S\ z > R)] \circ Fx\}}{[R\ (S \Rightarrow R)]\ z \gg Fx}(1) \qquad \dfrac{}{R\ z > (S\ n\ R)}\ *}{[R \circ (S\ z \gg R)] \Rightarrow (x)Fx}$$

$$(x)Fx$$

Numerele din dreapta liniilor orizontale arată schemele de bază care sînt folosite pentru diferitele treceri, şi deci este clar că pentru a pregăti calea spre utilizarea regulii (6) de la mijlocul demonstraţiei trebuie să presupunem la început că literele *R* şi S nu sînt abrevieri ale unor expresii în care *x* figurează liber. Nu avem însă alte restricţii în ce priveşte interpretarea literelor de scheme (exceptînd, desigur, restricţia generală pe care o pretinde păstrarea semnificaţiei), astfel încît întregul schelet al argumentării conduce la o justificare a regulii *Fx*
----- . Utilizarea acestei reguli trebuie să fie corectă îndată ce, după *(x)Fx*
cum este evident, este corect să utilizăm regulile (1), (2) şi (6) în felul arătat mai sus.

în afară de metoda folosită pentru demonstrarea sa, exemplul nostru prezintă interes pentru că se referă la trecerea, în exprimarea universalităţii, de la variabile libere la cele legate. Deoarece universalitatea respectivă aparţine propriu-zis propoziţiilor din argumen- :area considerată, aici nu ne depărtăm de la programul utilizării iterelor de scheme, ori de cîte ori acest lucru este posibil, dar cititorul e poate întreba pe bună dreptate de ce am presupus că obţinem for- nule cu variabile libere, pe baza cărora am

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡ Hilbert şi Ackermann, *Grundzilge der theoretisclien Logik,* cap. III, § 6, regula

putea argumenta în concor- anţă cu regula de mai sus. Răspunsul este că, pentru ţelurile logicii enerale, formulele în care variabilele libere au fost substituite în iod consistent pentru desemnări pot fi date ca exemple ale aceloraşi onfiguraţii ca şi originalele respective. Cînd o examinăm pentru rima oară, această regulă de interpretare a expresiei ,,de aceeaşi mfiguraţie" este surprinzătoare, deoarece o formulă care exprimă niversalitatea cu ajutorul unei variabile libere are în mod evident un caracter logic cu totul diferit de acela al formulelor singulare pe care le implică. Ne putem însă justifica făcînd aici apel la faptul că ele sînt, din punct de vedere gramatical, asemănătoare în toate privinţele, cu excepţia utilizării variabilelor libere, după cum se poate arăta printr-o examinare amănunţită a exemplului de mai sus. Conform cu regula (2), putem aserta orice propoziţie care se poate exprima sub forma *P* => (Q => *P)* ; deci, desigur, şi oricare propoziţie care se poate exprima sub forma *P* => {[7? => (S => 2î)]=> *P}*- Dar toate propoziţiile ale căror expresii diferă între ele doar aşa cum *FX* => {[/v =>

(S => 7?)] z? *FX}* diferă de *FY* za {[R => (S z> 2?)] za *FY},* — unde *X* şi y desemnează lucruri diferite — sînt de asemenea de forma considerată şi deci este permis să utilizăm expresia *Fx* => {[2? => (S => 2?)] => *Fx}* pentru a le aserta simultan. Tocmai pentru că fiecare dintre ele poate fi asertată în virtutea regulii (2), poate fi asertată şi propoziţia universală exprimată prin introducerea unei variabile libere în locul unei desemnări. Probabil că ivirea unor asemenea raţionamente în matematică i-a condus pe matematicieni să spună uneori că o variabilă denotă în mod ambiguu toate diferitele ei valori. Putem explica meritele notaţiei într-un mod mai corect spunînd că ea este o expresie realmente adecvată a rezultatelor inducţiei intuitive; căci tocmai faptul că această trăsătură a propoziţiilor singulare justifică generalizarea noastră este reprezentat de configuraţia pe care o păstrăm în exprimarea generalizării.

Pentru a utiliza avantajul acestui procedeu în alte contexte, puteml presupune că regula (5) ne permite să asertăm toate propoziţiile care se pot pune sub forma *(x)Fx => Fy.* Adică, ori de cîte ori acest lucru pare convenabil, putem scrie o variabilă liberă în locul unei desemnăr proprii în locul indicat prin litera schematică *Y* din această regulă Dacă, *mutatis mutandis,* ne permitem aceeaşi libertate în ce

priveşte *toate* literele noastre schematice, regăsim în fapt un calcul de felu celui pe care ni-l oferă Frege, Whitehead şi Russell. Căci atunci puten scrie:

/'='(? ° P)
[P => (? [3] r)J => [(/» ° ?) [3] (P => ')]
(~ .£ = ~ ?) [3] (? => P)
(x)fx => fy

ca expresii pentru propoziţii care se obţin prin utilizarea regulile (2), (3), (4) şi (5) şi să trecem la derivarea tuturor celorlalte formul asertabile pornind de la acestea în calitate de premise. în acest coiB text, regulile obişnuite de substituţie ne vor sta desigur la dispozB ţie ca reguli de derivare, deoarece fiecare formulă care rezultă dintr-B substituire pentru o variabilă liberă trebue să fie exemplificarea unei scheme pentru care formula dată este o exemplificare, şi deci trebuie ea însăşi să poată fi certificată ca truism dacă formula dată este certificată ca atare în virtutea configuraţiei ei. S-ar putea obiecta că această cale de a obţine un calcul al logicii cu variabilă liberă apelează la instrumentul dubios de a se permite două feluri de exemplificări pentru schemele noastre de bază, şi anume: formule fără variabile libere şi formule cu variabile libere. Este însă important să ne dăm seama că un asemenea procedeu este oricum impus de metoda lui Frege de prezentare a logicii. în adevăr, după cum am văzut, în sistemul său şi al succesorilor săi substituţia pentru formulele care conţin variabile libere poate conduce fie la formule fără variabile libere, fie la alte formule, care conţin variabile libere. Atunci cînd considerăm logica drept o teorie abstractă, fără a ne interesa de aplicările ei, examinăm numai substituţiile de-al doilea fel; dar ori de cîte ori calculul logic se aplică la demonstrarea unor aserţiuni extralogice, substituţia de primul fel este esenţială. Dacă obiectăm împotriva unei atare duplicităţi, atunci unica ieşire convenabilă ar fi abandonarea programului de a prezenta logica primară ca o teorie care cuprinde propoziţii universale de ordinul întîi; ar trebui să ne limităm la *reguli* universale, aşa cum sînt cele formulate mai sus. Atunci variabilele libere apar în logica noastră numai aşa cum figurează în regula (6) şi în exemplul de derivare de mai sus, adică în scopul de a marca utilizarea inducţiei intuitive, care este necesară pentru teoria cuantificării sau logica generală,

dar nu este pretinsă de către logica primară. Dar şi atunci se pune întrebarea care sistem de reguli este mai evident şi mai natural.

3. *Deducţie naturală şi desfăşurare*

în 1934, un sistem de reguli pentru o deducţie naturală a fost propus le către G. Gentzen§§§

tanţa demonstraţiei a determinat neglijarea sistemului. în simbolismul pe care l-am adoptat, regulile acestui prim sistem ar fi următoarele :

(1) $\frac{}{P\text{-}Q\ p}$ (2a) $\frac{P\cdot Q}{P}$ (2b) $\frac{}{Q}$

(3a PVQ (3b) $\frac{Q}{P \vee Q}$ (4) $\frac{PVQ\ PIR\ QtR}{R}$

(5) $\frac{P\,\uparrow}{\sim P}$ (6a) (6b)

(7) $\frac{PIQ}{P=>Q}$ (8)

(9) $\frac{Fx}{(x)Fx}$ (10) $\frac{}{FY}$

(11 $\frac{FY}{(3}$ (12) $\frac{<3\ x)Fx\ Fxj'P}{}$

Aici fiecare regulă este prezentată cu ajutorul unei scheme; schemele din stingă sînt reguli pentru introducerea semnelor formale, cele din dreapta sînt reguli pentru eliminarea lor. în cea mai mare parte regulile sînt uşor de înţeles, dar există totuşi unele aspecte care trebuie comentate.

Semnul ţ din regulile (5) şi (6a) reprezintă „falsul" (sau mai bine zis „absurdul") şi are unica schemă adiţională care, conform cu explicaţia lui Gentzen, înseamnă „dacă este valabil ceea ce este fals, atunci este valabilă orice propoziţie". *Y* din regulile (10) şi (11) este o literă schematică, la fel ca şi celelalte majuscule, însă *x* de sub linia din regula (9) şi la fel *x* din *Fx/P* din regula (12) sînt variabile libere al căror domeniu de acţiune nu depăşeşte linia orizontală. Semnu pe care l-am folosit în formularea regulilor (4), (5), (7) şi (12) poate fi considerat ca o abreviere pentru „implică". Desigur că el vizeazi să prezinte linia orizontală ca o schemă de inferenţă; dar deoarece are rolul gramatical de verb, semnele din stînga şi cele din dreapt; trebuie interpretate ca nume, adică în calitate de desemnări pentri propoziţii. De aceea, o redare completă a unui enunţ implicativ a avea forma §•?/§(?, unde semnul § este o abreviere pentru „că" sai „propoziţia că" ; este însă convenabil să adoptăm convenţia că semnu § poate fi

absorbit de către / după cum în propoziţia engleză „H says it is hot” *(El spune că este cald)* cuvîntul „că” este absorbit d către „says”. în amîndouă cazurile obţinem o simplificare fără amb guiţaţi. Gentzen, care utilizează în loc de *P/Q* notaţia , spune că litera dintre parantezele drepte stă în locul unei supoziţii din care se derivă consecinţa**********. Dar sensul este acelaşi; ceea ce numim uneori derivare a unei consecinţe dintr-o supoziţie este în realitate procesul prin care ne convingem că supoziţia impune consecinţa.

Pare destul de clar că de fapt Gentzen a prezentat logica într-un mod mult mai natural decît Frege, Whitehead şi Russell. Este adevărat că regulile sale sînt mai numeroase decît regulile şi axiomele din *Principia Mathematica,* dar aici fiecare semn este introdus separat, astfel încît devine posibilă demonstrarea echivalenţelor care în *Principia Mathematica* sînt folosite ca definiţii pentru semnele care nu sînt considerate ca primitive. Apoi, printr-o procedură simplă, asemănătoare cu aceea pe care a folosit-o Hrisip în elaborarea sistemului său de logică elementară, schemele de inferenţă de bază pot furniza altele. De exemplu, putem demonstra că *P -Q/PVQ* construind argumentarea cu osatura

$$p.Q \text{ (2a)} \text{ —— (3a) } pvQ$$

unde numerele din dreapta liniilor orizontale arată schemele de bază care au fost utilizate pentru a asigura trecerea. Dacă vrem, din orice schemă de inferenţă putem deriva o configuraţie de enunţuri-truisme, indiferent dacă acea schemă este de bază sau derivată, şi anume iplicînd regula (7), adică principiul condiţionalizării, folosit şi de către Hrisip.

Cu toate acestea, trebuie să admitem că sistemul de mai sus este ntrucîtva neelegant. într-un anumit fel, regulile (4), (5), (7) şi (12) lepind de alte reguli. Ceea ce rezultă dintr-o supoziţie trebuie să rezulte n concordanţă cu o anumită regulă şi, evident, aceasta nu poate fi egula care se formulează tocmai cu ajutorul supoziţiei respective.)e ce oare a considerat Gentzen că este necesar să introducă

********** în acelaşi an, S. JaSkowski a publicat în mod independent memoriul „Despre gulile supoziţiei în logica formală”, *Studia Logica,* nr. 1 (Varşovia, 1934), care este iezvoltare a unor rezultate obţinute încă în 1926 în seminarul condus de J. Lukasiewicz. îzvoltările ulterioare ale deducţiei naturale urmează mai curind metoda de expunere lui Jaskowski, dar procedura lui Gentzen sugerează teoria desfăşurării explicată ii jos.

asemenea omplicaţii tocmai aici? Răspunsul se poate găsi comparînd regulile entru conjuncţie cu regulile pentru disjuncţie. Este binecunoscut ă în algebra logicii semnele pentru conjuncţie şi disjuncţie sînt duale ître ele şi totuşi regula (4), care stabileşte eliminarea semnului dis- încţiei, nu corespunde cu regula (1), care conduce la introducerea semnului conjuncţiei, în acelaşi chip în care regulile pentru introducerea semnului disjuncţiei (3a) şi (3b) corespund cu regulile pentru eliminarea semnului conjuncţiei (2a) şi (2b). Dacă am încerca să scriem ceva care să corespundă în felul dorit, am obţine

$$p \; Q'$$

adică o aşezare a semnelor care nu se poate interpreta ca o schemă de inferenţă, deoarece sub linie se află două expresii propoziţionale. Desigur, am putea introduce o convenţie astfel încît o asemenea aşezare de semne ca cea tipărită mai sus să poată fi considerată drept o îmbinare a două scheme de inferenţă, adică drept un fel de a spune că fiecare dintre expresiile prepoziţionale de sub linie se poate infera din expresia de deasupra liniei. Dar noi nu urmărim aceasta, pentru că astfel s-ar crea o confuzie între *PNQ* şi *P-Q.* Pe scurt, trăsăturile curioase ale sistemului lui Gentzen par să-i fi fost impuse de către faptul evident că o inferenţă nu poate să aibă decît o singură concluzie, deşi ea poate avea două sau mai multe premise. Probabil că tocmai aceasta l-a determinat pe Pseudo-Scotus să nu completeze prezentarea sa a paradoxului *consequentiae* cu o demonstraţie simplă că o propoziţie formal-necesară se poate deriva formal din orice altă propoziţie[†††††††

adevărate, atunci se poate spune că sînten obligaţi la desfăşurarea acestor premise. Nici una dintre propoziţiile exprimate prin *R* şi S nu este o concluzie a inferenţei, dar se poate spune că ele sînt limitele desfăşurării respective. Deşi pentru conve nienţă vom presupune că ele se exprimă prin propoziţii la modu indicativ, trebuie subînţeles că în contextul desfăşurării nu se aser tează nimic. Pentru a limpezi aceasta putem, dacă preferăm, să scrien semne de întrebare după expresiile respective, dar aceasta nu est necesar în ceea ce urmează, deoarece formulele limitelor neasertat se vor recunoaşte întotdeauna ca atare, datorită poziţiei pe care o ocupă în tabelele de desfăşurare pe care le vom construi.

O desfăşurare foarte s:mplă poate avea forma

$$\frac{P \quad Q}{R \quad s'}$$

dar între formulele iniţiale, care exprimă premisele, şi formulele finale, care exprimă limitele, pot exista numeroase expresii intermediare, adică expresii care figurează atît deasupra liniei cît şi dedesubtul ei. Dacă o desfăşurare are o singură formulă finală, deşi aceasta se poate repeta de mai multe ori la capătul de jos al diferitelor ramuri descendente, desfăşurarea respectivă este o derivare a propoziţiei exprimate prin această formulă finală. Evident, o desfăşurare care nu este o derivare se poate continua întotdeauna astfel îneît să devină o derivare: n-avem decît să adăugăm la fiecare ramură descendentă o formulă care este disjuncţia tuturor formulelor finale existente. Dacă o derivare nu are premise sau, mai exact, nu are premise care să nu poată Fi înlocuite cu oricare altele, atunci această derivare este o demonstraţie. Aceste relaţii se lămuresc mai bine dacă luăm în consideraţie şi lucrăm cîteva exemple.

Exact după cum o derivare se spune că este validă dacă premisele impun concluzia, tot astfel putem spune că o desfăşurare este validă dacă premisele *cuprind* limitele la care conduce desfăşurarea. Aici il urmăm pe Camap, care în lucrarea sa *Formalization of Logic* a introdus denumirea de „cuprindere logică" (logical involution) pentru relaţia care are loc între două mulţimi de propoziţii atunci cînd este mposibil ca toate propoziţiile din prima mulţime să fie adevărate ;i simultan toate propoziţiile din a doua să fie false. în acest caz, mplicaţia trebuie să fie considerată ca o cuprindere a unei mulţimi care onţine un singur membru ; şi după cum asertarea unei implicaţii ia o ormă ca *P, Q/R,* tot

astfel asertarea unei cuprinderi care nu este mplicaţie ia o formă ca *P, Q/R, S,* unde virgulele dinainte şi de după / ervesc pentru a separa expresiile propoziţiilor din mulţimile rele- ante. în ceea ce urmează vom utiliza convenţia că semnul / poate bsorbi prefixele de forma §, care altfel ar fi ataşate la toate expre- iile propoziţiilor scrise anterior şi posterior; dar este important să iţelegem că atunci cînd scriem / între expresii fără prefixe, aceasta u înseamnă că le transformăm într-o particulă gramatic- lă sau conec- v distinct de verb. Pe scurt, o formulă de felul *P, Q/L, S* este doar abreviere pentru o formulă după tiparul {§P, §0} / {§2?, §S} şi, ca tare, pentru o propoziţie cum ar fi *Mulţimea care constă dinpropozi- a că P are loc şi propoziţia că Q are loc cuprinde mulţimea care constă '.n propoziţia că R are loc şi propoziţia că S are loc.* Deoarece însă iitem omite fără ambiguitate atît acoladele cît şi prefixele, vom

proceda întotdeauna astfel şi chiar ne vom permite libertatea de a rezerva acoladele pentru o utilizare specială, aşa cum vom preciza acum.

Schemele de desfăşurare de bază necesare pentru logica

$$(2a)\ \frac{P \cdot Q}{P} \qquad (3b)\ \frac{P}{P \vee Q} \qquad (4)\ \frac{P \vee Q}{P \quad Q} \qquad (6)\ \frac{P \quad \sim P}{\bullet}$$

generală sînt următoarele:

(1) $\frac{P \quad Q}{P}$ (2b) Q

(3a) $\frac{P}{P \vee Q}$

$p \sim p$

(7a) $\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{\{Fx\}}$ (7b) $\frac{Q \quad P \Rightarrow Q}{(x)Fx}$ (8 $\frac{P \; P \wedge Q}{e}$

(9) $\frac{(*)F*}{FY}$ (12) $\frac{\{Fx}{}$

<3*)

Asteriscul folosit în formularea regulilor (5), (6) şi (7a) seamănă cu Jolly Joker din jocurile de cărţi, căci el poate fi considerat ca un substitut pentru orice expresie propoziţională vrem. Am fi putut folosi în locul său o literă mare, să zicem *R,* dar asteriscul serveşte pentru scopul adiţional de a atrage atenţia asupra acestor reguli, care prezintă o importanţă deosebită în demonstraţie. în afară de această utilizare, unicele elemente noi sînt aici apariţia a două expresii sub liniile din regulile (4), (5) şi (7a) (adică în trei din locurile unde Gentzen considera necesar să introducă supoziţii) şi utilizarea semnului {Fx} în regulile (9) şi (12) pentru a reprezenta mulţimea tuturor valo- A
rilor posibile ale funcţiei denumită *Fx.* Dar aceste modificări sînt suficiente pentru a asigura simetria şi a ne permite introducerea şi eliminarea semnelor formale prin reguli care par cele mai fireşti posibile. Astfel, regulile (5) şi (6) sînt versiuni ale principiului terţului exclus şi ale principiului non-contradicţiei, iar celelalte, cu o singură excepţie, sînt evidente.

Regula (7a), care la prima vedere pare întrucîtva curioasă, este d« fapt echivalentă cu principiul după care condiţionalul lui Filon est< implicat de negaţia antecedentului său. Dacă vrem, aceasta din urm; se poate obţine uşor ca regulă derivată.

(13) ~ P/P o *Q.*

Demonstraţie:

«

$$\sim P \sim P \text{ P} \Rightarrow \text{Q} \; \langle^{7a}\rangle$$

—sr— (6)

Dar (7a) este de preferat ca regulă de bază din motive de eleganţă: eleganţa pretinde ca fiecare semn formal să fie introdus separat, adică nici o regulă de bază să nu se refere la mai mult decît un singur semn.

în general, schemele de desfăşurare noi se pot deriva întotdeauna din cele deja date, dacă transferăm o expresie propoziţională de cealaltă parte a liniei orizontale şi, simultan, adăugăm sau scoatem un semn de negaţie. Iată, de exemplu, un nou principiu de desfăşurare derivat din regula (4) :

(14) *~QIP, ~(PVQ).*

Demonstraţie:

*

pve ~ $\sim\langle PVQ'I$ (3)

Virgula pe care am inserat-o între cele două expresii de după bară trebuie, desigur, să arate că aceste expresii se iau din extremităţile unor ramuri descendente separate. La fel, o virgulă aşezată între două jxpresii anterioare barei arată că ele trebuie să fie considerate ca ’iind luate din părţile cele mai de sus ale unor ramuri ascendente reparate.

Cînd lucrăm la o desfăşurare, este esenţial ca formulele individuale are sînt deja conectate, fie direct printr-o singură linie orizontală, ie indirect prin mai multe linii orizontale, să nu fie din nou conectate ti vreun fel. în caz contrar am putea obţine configuraţii absurde, um ar fi

$$\frac{PV2}{P \quad 0}$$
$$P\text{-}Q$$

a fel, dacă *Fx* se introduce sub (3x)Fx, el nu are voie să fie urmat e *(x)Fx,* căci schema absurdă

$$\frac{O^*)Fx}{\frac{Fx}{(x)Fx}}$$

îprinde aceeaşi greşeală de a lega jos ceea ce fusese deja legat sus, anume acele formule care exprimă valori ale funcţiei denumită A

x. Desfăşurarea este o generalizare a tehnicii pe care matematicienii numesc demonstraţie prin analiza cazurilor, iar cazurile odată demar- te ca alternative nu mai trebuie niciodată să fie considerate îm- eună.

Principiul condiţionalizării, care intervine ca regulă de bază în sis temui lui Gentzen, se poate demonstra foarte uşor în acest nou sistem Pentru aceasta, este necesar doar să fie demonstrabilă propoziţi; exprimată prin *P => Q* îndată ce propoziţia exprimată prin *P* impun» propoziţia exprimată prin *Q,* iar aceasta se arată după cum urmează

(15) *Dacă PjQ, atunci */P => Q.*

Demonstraţie:

*

P *P => Q (7a)*

— (Ipoteză)

p °Q ™

Pentru a ilustra pe larg metoda desfăşurării este convenabi să demonstrăm regulile şi axiomele din versiunea uzuală a logici generale. în primul rînd, vom arăta echivalenţa dintre *P => Q* ş *~ P V Q,* adică echivalenţa care în *Principia Mathcmatica* este utili zată pentru a defini condiţionalul lui Filon. Aceasta se poate obţin prin două derivări.

(16) *P QJ ~p v Q.*

Demonstraţie:

«

PDO P,m ~P

Q *~PVQ (3a)*

~P Ve (3b)

(17) *~ PVQţP*

Demonstraţie: -<?•

~PVQ (4)

~P *Q*

P => Q P o *Q*

Acum să observăm că avem *modus ponendo ponens,* adică regu detaşării pentru condiţionalul filonian, ca o regulă de bază, şi anuii (8). în al treilea rînd, construim demonstraţii pentru cele patru axionl independente alese de Whitehead şi Russell pentru logica elementan adică mai exact: arătăm validitatea schemelor de axiome corespul zătoare. I

(18)*/(P V P) ⊃ *P.*

Demonstraţie:

PVP -(4) *(py* P) => **P** (7a)

P , *P*

(7b)

(P v P) => P$^{(7b)}$ (PVP) = *P*

(19) */P = (P V 0.
Demonstraţie:

p «
p=(pyo)(7a)

P=> (PVQ) (7b)

(20) */(PV0 *o* (Q V *P).*
Demonstraţie:

----------(7a) PVQ
----------(P V2) => (2 V *P)*

?V?<3b)
(PV2) => (2VP) (7b) *(PVQ)* =>(2V p/7b)

(21) */((? O *R)* o [(PV0 => (PVP)]. *Demonstraţie:*

(2 = P) => [(PV2) = (PV«)]
2 =>
p (4)
~ (PV2) <14> 5 *(PVQ) o* (P V R) (13)
(2 => *) => [(P V 2) => (P V P)] (7b)

(pyO)o (py p> (7b)
?=> P) = [(PV0)O(PVP)]

înde /•/ este o notaţie prescurtată pentru p V
(PV2) (PVP) (7B)
p
(2 = P) => [(PV2) = (PVP)] (7b)

în sfîrşit, construim demonstraţii pentru alte două scheme de axiome două reguli de inferenţă, necesare pentru o versiune a logicii genele asemănătoare cu aceea prezentată de Hilbert şi Ackermann, dar ire în locul axiomelor utilizează schemele de axiome.

(22) **/(x)Fx = FY.*
Demonstraţie:

(x)Fx *(x)Fx FY (7a)*
FY (10)
(x)Fx TY (7B)
=>

(23) */FY = (3x)Fx.

Demonstraţie:

P

FY

Qx)Fx (H)

FY => (3x)Fx (7b)

FY ^(JxjFx (7a)

(24) Dacă *P* nu conţine pe *x* ca variabilă liberă, *x* atunci: *P => Fx/P => (x)Fx.*

Demonstraţie:

P

F

x

(x)Fx

P za (x)Fx

P (x)Fx

(8)

(9)

(7b)

(25) Dacă *P* nu conţine pe *x* ca variabilă liberă, atunci:

Demonstraţie:

Fx => Pţ(3x)Fx => P.

------*----------(7a)

(3x)Fx (12) ®x)Fx = p

Fx P Fx (8)

_____P (3 (7b)

x)Fx o P. Fx3 Fx2 Fx3 etc.

Si

(3x)Fx

Fx, Fx2 Fx3 etc. {F*}

Toate aceste derivări sînt lesne de urmărit, cu excepţia celor de (24) şi (25), care au nevoie de unele explicaţii. Atunci cînd enunţă regula (9) sub forma şi regula (12) sub forma ^x'>Fx utiliza (x)Fx unde *Fx- Fx2, Fx3* etc. se presupune că reprezintă acoladele pentru precizarea că avem de-a face cu clasa diferitele valori ale funcţiei. Dar este evident imposibil să futurorpropiziţilor care sînt valori ale funcţiei exprimate construim tabele de dedsurare avînd un număr infinit de rămîn. Atunci cum putem utili prin *Fx*, adică ceea scriem sînt abrevieri pentru

vreodată regulile noastre, care nu sînt finitiste ? Evident, unica posibilitate este de a demonstra ceva cu generalitate completă pentru toate valorile funcţiei exprimate prin semnul *Fx,* utilizînd acest semn *ca şi cum el ar exprima o valoare* şi nu funcţia însăşi. în aceasta constă metoda de raţionament cu ajutorul variabilelor libere asupra căreia am atras atenţia în secţiunea anterioară. Dacă putem arăta în acest cliip că propoziţia exprimată prin *P* implică orice valoare a funcţiei exprimată prin *Fx,* putem demonstra că *P/(x)Fx* cu ajutorul desfăşurării

$$\text{I}\qquad \frac{P\ P\ P}{Fx_2\ Fx_3}$$

$$(x\}Fx$$

Tot astfel, dacă putem arăta în acest chip că orice valoare a funcţiei exprimată prin *Fx* implică propoziţia exprimată prin *P,* putem demonstra că (3 *x)Fx]P* prin desfăşurarea

$$\frac{(3\ x)Fx}{Fx_1\ Fx_2\ Fx_3}$$

— — — etc. P P P

Desigur că în amîndouă cazurile este esenţial ca litera *P* să fie cu adevă- at expresia unei propoziţii şi nicidecum o abreviere a unei alte expresii :are conţine pe *x* ca variabilă liberă, adică aşa cum intervine *x* în *~x.* Toate acestea sînt prinse în formulările lui (24) şi (25) de mai sus i tocmai de aceea aceste principii au un aspect mult mai complicat lecît regulile (9) şi (12).

în lucrarea sa *Metliods of Logic,* care este o tentativă recentă de tnbunătăţire a tehnicii investigaţiei logice, Quine utilizează o variantă metodei tabelelor de adevăr pentru logica propoziţională, variantă are furnizează şi exigenţele adiţionale ale logicii generale prin patru -guli asemănătoare celor de mai sus. în particular, el dă o regulă e generalizare universală şi o regulă de particularizare existenţială naloage regulilor noastre (9), respectiv (12) (cu deosebirea că ele nu >nţin acolade pentru a indica referirea la toate valorile unei funcţii) prescrie o restricţie pentru a preveni trecerile nelegitime cum sînt -le din schema

$$\frac{(3^*)Fx}{IFx}$$

$$(^x)Fx\ '$$

Este neîndoielnic că atunci cînd sînt folosite împreună cu proce- ul supoziţiilor introdus de Gentzen şi Jaskowski, aceste reguli sim- ică construirea demonstraţiilor. Dar Quine însuşi spune că proce-

dura sa este intrarea în Ţara de dincolo de Oglindă‡‡‡

$\frac{P \; P=>Q}{Q}$ este indubitabil o schemă de inferenţă validă. Acest fel de a vor este nefericit, deoarece sugerează în mod greşit că semnul exprin o conexiune de semnificaţii între semnele propoziţionale care sî

antecedentul şi consecventul său. Cei care îl utilizează în felul acesta ajung la paradoxurile că o propoziţie falsă, doar pentru că este falsă, implică orice propoziţie, şi că o propoziţie adevărată, doar pentru că este adevărată, este implicată de orice propoziţie. Lewis spunea însă că o propoziţie implică alta în sensul strict al cuvîntului, dacă şi numai dacă este *imposibil* ca prima să fie adevărată şi simultan a doua să fie falsă, iar pentru a exprima această relaţie între două propoziţii exprimate prin *P* şi *Q* el scria *P -< Q.* în definiţia pe care a dat-o implicaţiei, Lewis l-a urmat pe H. MacColl, care dăduse anumite sugestii pentru logica modală în lucrarea *Symbolic Logic and its Applications,* publicată în 1906. Ca şi MacColl, Lewis admitea că, potrivit acestei definiţii, o propoziţie imposibilă trebuie să implice orice propoziţie, iar propoziţia necesară va fi implicată de orice propoziţie. Dar el susţinea că aceste două consecinţe n-ar fi de fapt paradoxale ;i nu ar discredita opinia lui că relaţia pe care a numit-o de implicaţie strictă este tocmai relaţia care justifică inferenţa de la o premisă la o concluziе în raţionamentul deductiv. Unii critici au spus că implicata sa strictă§§§

o abreviere pentru ~O(P. *~Q).* Celelalte două imboluri nedefinite sînt cele ale negaţiei şi conjuncţiei, iar formulele xiomatice pe care le utilizează în deducţiile sale sînt următoarele:

>1. *p • q -< q • p*
;2. *p . q < p*
3. *p <p • p*
4. *(p ■ q) • r < p-(q-r)*
B6. *[(/> <q) ■ (q < ')] <(P < r)*
B7. *\j> ■ (p < q)} < q*
BS. O(p . q) < Op
B9. *(3 p, q) [~(p ■< q) ■ -(/>-< ~ ?)]•*

Litera B care figurează în denumirea fiecărui postulat arată că vorba despre postulatele dintr-o a doua mulţime, considerată ca

distinctă de sistemul său din *Survey.* în afară de regula de substituţie pentru variabile şi regula de înlocuire reciprocă a expresiilor care sînt strict echivalente, se mai permit două metode de derivare :

una după schema

$$\frac{P \quad P<Q}{Q} \; 9$$

iar a doua după schema

$$\frac{P \quad Q}{P\text{-}Q'}$$

Evident, prima nu este decît prototipul detaşării sau *modus ponens* cu *P -< Q* în loc de *P => Q* ; cît priveşte a doua, pe care Lewis o numeşte adjuncţie, ea este necesară în sistemul său din cauza modificării lui *modus ponens.* în *Principia Mathematica,* care permite inferenţa de la *P* şi *P => Q* la *Q>* ne putem dispensa de regula lui Lewis de adjuncţie, din cauză că *p => [q => (p • <?)]* este o teoremă. Dai Lewis, deşi admite această teoremă în sistemul său, nu o poate folos: ca premisă pentru derivarea lui *P-Q* din *P* şi *Q* deoarece din punctu său de vedere prezenţa aşa-numitei implicaţii materiale nu este suficientă pentru a justifica deducţia, iar *p -< [q -< (p • q)*] nu estf teoremă în sistemul său. în prezenţa regulii de detaşare menţionaţi mai sus, fiecare din axiomele sale corespunde unei reguli de inferenţî dintr-o premisă. De exemplu, atunci cînd se ia versiunea lui Lewii a lui *modus ponens,* B2 corespunde cu regula 2(a) din sistemele prezentate în secţiunea precedentă.

Primele şapte din propoziţiile a căror listă am dat-o mai

sus s-a: putea numi axiome de bază ale logicii modale a lui Lewis, deoareci ele constituie sistemul SI, pe care el îl consideră ca fiind cel mai strict şi apar de asemenea ca axiome sau teoreme în toate sistemele p care le concepe ca meritînd să fie puse în discuţie. Dar ele nu formeaz o mulţime completă în sensul tehnic al acestei expresii şi condu la o uriaşă complicaţie a modalităţilor de ordin mai înalt, de exempl la posibilitatea necesarului, necesitatea posibilităţii şi aşa mai departe De aceea, O. Becker[22] şi alţii au propus diferite completări, dinţi care cele mai interesante, dacă folosim notaţia lui Lewis, sînt:

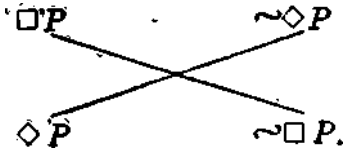
C10. ~ O ~ *p* -< ~ *O* ~ ~ *O* ~*p* sau O O *p* -< O *p,* Cil. O *p* -< ~ O ~ *Op* sau *O* ~ *O p* < ~ O *p.*

Ele au fost denumite respectiv principiul reducerii slabe şi principii reducerii tari, deoarece amîndouă servesc la reducerea complexită[1.] modalităţilor de ordin superior, deşi nu în aceeaşi măsură. împreună cu axiomele de bază. Cil este deductiv echivalent cu C10 luat împreună cu principiul lui Brouwer *p* -< ~ O ~ O *p.* Dacă utilizăm pătratul ca o abreviere pentru ~ O ~ (adică în sensul că „este necesar ca") şi utilizăm principiile dublei negaţii şi contrapoziţiei pentru implicaţia strictă, putem exprima cele două principii de mai sus, fără a folosi negaţia, în felul următor:

C10. □ *p* <
Cil. O *p* -< □ o *p.*

Pentru fiecare din ele conversa se poate demonstra, astfel încît putem spune că primul principiu ne permite să identificăm necesitatea unei propoziţii cu necesitatea necesităţii sale, în timp ce al doilea ne permite să identificăm posibilitatea unei propoziţii cu necesitatea posibilităţii sale. Efectul adăugării primului principiu, adică a principiului mai slab, la axiomele de bază este eliminarea necesităţilor care nu sînt ele însele necesare, ci doar contingente, adică mai exact: este exigenţa ca oricine care vrea să vorbească în acest mod să admită că el nu utilizează cuvîntul „necesar" în sensul în care este folosit în logica modală semnul pătratului. Efectul adăugării principiului al doilea este pretenţia ca toate propoziţiile modale să fie sau necesar adevărate, sau necesar false. Dacă îl adoptăm, atunci admitem doar patru modalităţi (în afară de adevăr şi fals, care sînt uneori incluse deoarece necesitatea implică adevărul, iar adevărul mplică posibilitatea), şi anume

următoarele, care se constituie în pătratul opoziţiilor



n adevăr, în această ipoteză toate modalităţile de ordinul al doilea e reduc la modalităţi de ordinul întîi. De exemplu, avem O QP = JP, ceea ce Becker găseşte că este oarecum paradoxal. Lewis însuşi îclină să respingă ambele principii de reducere şi deci să permită îodalităţi de ordin superior.

S-a demonstrat de către P. Henle[23] că sistemul cel mai economic e logică modală, pe care Lewis îl numeşte S5 (adică sistemul deter- îinat de Bl—7 şi Cil) este echivalent cu algebra lui Boole—Schroder (nu cu algebra cu două valori) atunci cînd elementele algebrei sînt propoziţii iar semnul modal *O* se introduce prin următoarele reguli:

O P = 1 dacă şi numai dacă *P* 0,
O *P* = 0 dacă şi numai dacă *P* = 0.

Pe scurt, acest sistem, cu principiul său de reducere tare, realizează ceea ce avea în vedere Boole cînd spunea în lucrarea sa *Mathematical Analysis of Logic* că semnul 1 ar putea fi considerat ca reprezentant al sumei tuturor posibilităţilor, sumă pe care el o denumea Universul propoziţ'e'.

Deşi S5 este cel mai simplu dintre sistemele pe care le consideră Lewis, nici el şi nici un alt sistem nu dă o caracterizare completă a implicaţiei stricte fără regulile lui Henle, deoarece toate axiomele rămîn adevărate dacă O P se consideră ca echivalent cu P, iar -< se ia doar ca o variantă tipografică pentru =>. Se pare că tocmai pentru a exclude o asemenea interpretare indezirabilă a noului său semn Lewis a propus axioma existenţială foarte stranie:

B9. (3*p,* g)[*~{p<q) • ~{p< ~ ?)]•*

Aceasta înseamnă că există cel puţin două propoziţii astfel încît prima să nu implice nimic cu privire la adevărul sau falsul celei de-a doua, iar aceasta are loc pentru implicaţia strictă, dar nu pentru implicaţia materială. însă această axiomă are o formă cu totul diferită de celelalte. în timp ce acelea, luate împreună cu principiile lui Lewis de substituţie,

detaşare şi adjuncţie, permit orice raţionament după anumite tipare specifice, aceasta neagă universalitatea pe care o exprimă axiomele cu variabile libere, iar introducerea ei are ca efect *respingerea* formulei *(p < q)* V *(p -< ~ q).* Poate că cea mai simplă cale pentru realizarea a ceea ce îşi propune Lewis ar fi de a spune de-a dreptul că schema

$$\frac{P \hat{} Q}{P < Q}$$

nu este validă. Nu trebuie să ne mirăm că o măsură de acest fel est necesară pentru a exclude o interpretare indezirabilă a sistemulr modal în care -< este nedefinit. Imp[1]icaţia materială se poate carac teriza complet prin reguli de inferenţă convenabile, dar aceasta doa pentru că ea este o funcţie de adevăr. Dacă luăm ca primitivă impl caţia strictă, cel mai bun lucru pe care îl putem face în această direcţi este de a stabili exhaustiv şi exclusiv proprietăţile pe care ea le ai în comun cu implicaţia materială. Pe de altă parte, fiind dată definiţi de mai sus pentru implicaţia strictă şi regulile lui Henle, S5 esl complet, iar B9 este inutil.

Să observăm că în prezentarea sistemului său Lewis ;crie -< între expresii propoziţionale (mai exact: între variabile care marchează locuri pentru atare expresii) ca şi cum acest semn ar avea acelaşi statut gramatical ca =>; de asemenea el scrie *O* înaintea expresiilor propoziţionale la fel cum scrie ~. Dacă vrem să dăm o parafrază în limba uzuală astfel îneît toate formulele să fie reprezentate prin propoziţii de formă aproximativ asemănătoare, am putea eventual citi *P -< Q* ca *Dacă P atunci Q,* iar *O P* ca *Posibil P.* Forma condiţională a enunţurilor a fost utilizată adesea în antichitate atît de către Aristotel, cît şi de către stoici, pentru a indica deductibilitatea consecventului din antecedent, ceea ce Lewis urmăreşte să simbolizeze cu semnul lui specific iar în vorbirea uzuală folosim adesea prefixul „posibil" pentru expresii care din punct de vedere gramatical pot apare şi ca propoziţii independente. Dar obiectivul principal al lui Lewis este de a susţine că deductibilitatea unei concluzii din premise într-un raţionament valid depinde de existenţa între ele a relaţiei denumită implicaţie strictă şi că această relaţie nu se poate defini cu ajutorul funcţiilor de adevăr. Pentru a sublinia acest detaliu am putea, dacă vrem, să citim *P -< Q* ca *Propoziţia că P are loc implică strict propoziţia*

Q are loc, dar numai dacă presupunem că Lewis a adoptat în mod :acit o convenţie pentru semnul său asemănătoare cu

cea din secţiunea îoastră precedentă, unde semnul / poate absorbi prefixul pe care 1 aşezăm în fruntea unor expresii propoziţionale pentru a determina lesemnări propoziţionale. Dacă facem o supoziţie similară în ce •riveşte rombul lui Lewis, putem să citim eventual O P ca *Este posibil '.ă P.* Lewis personal nu discută diferitele modun de a citi formulele ale, iar succesorii săi s-au exprimat adesea ca şi cum alegerea între iceste diferite moduri de citire ar fi pur şi simplu o chestiune de gust iterar. Or, este important să ne dăm seama că a doua manieră de itire dă o prezentare mult mai explicită a diferiţilor factori pe care cuprinde tentativa lui Lewis, şi de aceea, din punct de vedere filoso- c, este preferabilă. Atunci cînd Whitehead şi Russell vorbesc despre [3] 3 <2 ca un enunţ de implicaţie materială, se pare că ei confundă ouă chestiuni diferite, şi anume (I) „Ce anume justifică inferenţa e la propoziţia că are loc *P* la propoziţia că are loc *Q* ?" şi (II) „Care înt premisele adiţionale cele mai slabe care împreună cu premisa ă are loc *P* sînt suliciente pentru a infera concluzia că are loc *Q1"*)acă inferenţa de la propoziţia că are loc *P* la propoziţia că are loc • este cu adevărat justificată, la prima întrebare se poate răspunde rin enunţarea unei relaţii de implicaţie între cele două propoziţii, ar dacă este necesară o premisă suplimentară, atunci între cele două ropoziţii menţionate nu avem o implicaţie propriu-zisă şi tot ce putem ice pentru a răspunde la a doua întrebare este de a da formula *P => Q.* Această formulă se construieşte prin utilizarea semnelor propo- ziţionale *P* şi *Q,* dar ea nu este *despre* propoziţiile pe care le exprimă. Desigur, o putem înlocui prin propoziţia echivalentă *sau nu P, sau Q,* iar apoi să dezvoltăm aceasta pînă la forma *sau nu este cazul că are loc P, sau este cazul că are loc Q,* care conţine desemnările propo- ziţionale *că are loc P* şi *că are loc Q.* Dar expresia mai lungă nu este o analiză a sensului celei mai scurte, căci ea nu face decît să urmeze acelaşi şablon cu inflaţie verbală. Pe de altă parte, formula lui Lewis *P -< Q* este presupusă a fi *despre* propoziţiile exprimate prin *P* şi *Q* tocmai pentru că este concepută ca un răspuns propriu la prima din cele două întrebări de mai sus. Iar atunci cînd o traducem prin parafraza *Propoziţia că are loc P implică strict propoziţia că are loc Q,* putem susţine pe bună dreptate că am dat o analiză a sensului ei, deoarece versiunea noastră mai lungă nu se menţine la acelaşi tipar de bază ca cea originală şi

atrage atenţia asupra complexităţii utilizării, care nu este evidentă atunci cînd se examinează forma iniţială.

Că Lewis nu a reuşit să clarifice chestiunea despre care am vorbit în alineatul anterior s-a datorat poate faptului că el a fost în mod eronat de acord cu Whitehead şi Russell, considerînd că este necesară utilizarea enunţurilor implicative ca premise pentru *modus ponens,* astfel încît a urmat îndeaproape practica lor, în măsura în care acest lucru era compatibil cu menţinerea diferenţei dintre implicaţia strictă şi cea materială. Se pare că motivul principal pentru care a elaborat teoria sa a fost dorinţa de a substitui implicaţia strictă pentru impli caţia materială în *modus ponens,* iar dacă este aşa, nu ne surprind* faptul că el atacă sistemul implicaţiei materiale (şi nu numai denu mirea eronată) cu argumente inadecvate. Evident, nimeni nu v* folosi o argumentaţie de forma

$$\frac{\blacksquare P \quad P \Rightarrow 8}{Q}$$

dacă în prealabil a stabilit adevărul celei de-a doua premise fie desco perind că prima premisă este falsă, fie stabilind că concluzia est adevărată. într-adevăr, în primul caz el nu ar mai putea aserta prim premisă, iar în al doilea n-ar avea nevoie de această argumentaţi pentru a ajunge la concluzie. Cînd condiţionalul lui Filon de form $P \Rightarrow Q$ apare ca premisă în *Principia Mathematica,* el este accepta ca necesar pe temeiuri logice, şi tocmai acestea sînt temeiurile cai fac posibilă aserţiunea $P \dashv Q$. Conform cu definiţiile lui Lew

$$(P <(?) = \Box (P = Q),$$

unde O semnifică necesitatea logică. El merge chiar atît de depar încît afirmă că $P \dashv Q$ are loc în sistemul său dacă şi numai dacă $P\ Q$ este o tautologie**********. Dacă „tautologia" se presupune aici a fi truism în logica nemodală, susţinerea sa nu este corectă, deoarece axiomele B6 şi B7 furnizează contraexemple. Dar este cert că $P \blacksquare\!\!< Q$ nu are loc niciodată atunci cînd $P \Rightarrow Q$ nu este un adevăr al logicii. Prin urmare, meritul logicii sale modale nu poate fi — după cum pare să susţină el — furnizarea unei alternative de raţionament care să fie într-un anumit fel superioară metodei lui Frege, ci mai curînd ea exprimă explicit noţiunea

---

********** " *Idem,* p. 244.

de necesitate pe care toţi logicienii, inclusiv Frege, au considerat-o ca fiind acordată.

Pentru a lămuri relaţia dintre logica lui Lewis şi logica lui Frege sau cea din *Principia Mathematica,* diferiţi autori au prezentat unul sau mai multe dintre sistemele lui Lewis ca derivînd din *Principia Mathematica* şi anumite axiome sau reguli de inferenţă suplimentare††††††††††††††††††††††††††††††††. De exemplu, pentru a deriva sistemul lui Lewis cu principiul reducerii slabe, adică S4, Godel adaugă la logica primară din *Principia Mathematica* trei noi formule axiomatice :

1- □ *P ° P*
2. □ *p [□(/>=?) = □ ?]*
3. □ *P = □ □ P,*

unde □ trebuie luat ca semn primitiv[24], şi o regulă nouă: dacă *P* este o teză a sistemului rezultat, atunci şi □ P este o teză a acestui sistem. Cu această notaţie, principiul reducerii tari din S5 devine

4.

Această versiune posedă o simplitate elegantă, iar noua regulă pe zare o conţine pune în evidenţă foarte bine faptul interesant că necesitatea studiată în logica modală este o proprietate a propriilor sale propoziţii. Dar nu s-ar putea spune că această prezentare ajută mult a înţelegerea statutului logicii modale în cadrul teoriilor deductive. Dimpotrivă, utilizarea unui asemenea sistem de axiome pentru logica nodală pare să fie condus pe unii filosofi să considere că logica modală ■ste logică doar în sensul larg şi vag în care s-ar putea vorbi şi de > logică deontică (atunci cînd vrem să ne referim la o teorie axio- natică generală a datoriei) sau de o logică a timpurilor (atunci cînd vrem să ne referim la o teorie axiomatică generală a relaţiilor care în multe limbi se exprimă prin inflexiuni temporale) sau chiar de o logică spaţială (atunci cînd dorim să ne referim la geometria pură). Această deprindere de gîndire este nefericită, deoarece ea ne abate de la acele consideraţii care

---

†††††††††††††††††††††††††††††††† De exemplu, K. GOdel, „Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls", *'rgebnisse eines mathematischen Iiolloquiums,* IV (1932), pp. 39 — 40, A se vedea G.H. □n Wright, *An Essay in Modal Logic,* appendicele II.

" Godel personal utilizează „B" (de la *beweisbar}* deoarece el îşi prezintă sistemul i cadrul unui articol despre logica intuiţionistă, despre care vom vorbi mai jos.

sînt cele mai relevante pentru aprecierea caracterului logic al logicii modale şi deci pentru luarea unei decizii în problema principiilor de reducere.

După cum am văzut, Lewis înclină să respingă ambele principii de reducere, dar el recunoaşte că nu poate să aducă nici un argument decisiv în favoarea unui asemenea punct de vedere. După ce deosebeşte cinci sisteme care, după cum arată el, diferă în ce priveşte gradul de strictețe, el sugerează că obiectivele cercetării logice vor fi probabil servite cel mai bine acordînd atenţie acelor sisteme mai stricte care nu includ principii de reducere, dar el spune deschis : „Prevalarea bunelor uzanţe în inferenţa logică — de exemplu, practica deducţiei matematice — nu este suficient de exactă şi autoconştientă pentru a determina clar care dintre aceste cinci sisteme exprimă cele mai acceptabile principii de deducţie”‡‡‡

că unul din motivele prim pale ar fi faptul că expresiile modale de ordin superior cum ar fi «posibil că posibil» s; «posibil că imposibil» cu greu ar putea fi *utilizate* în vorbirea uzuală sau ştiinţifică (cu excepţia logicii modale). De aceea, o problemă de cea mai mare importanţă este de a *inventa o utilizare* sau ceva «echivalent» cu o utilizare pentru expresii de acest fel (în afara logicii modale). Dacă se realizează aceasta, atunci problema adevărului pe care am amintit-o mai sus poate fi atacată pe o bază mai fermă"".

Apoi, după ce dă o interpretare în termeni de procese naturale, interpretare care satisface axiomele de bază ale logicii sale modale dar contravine principiului reducţiei, el scrie :

,,Mi se pare că existenţa unor asemenea exemple în cadrul proceselor naturale arată că identităţile în chestiune nu pot pretinde validitate universală pentru conceptul de posibil (şi necesar) în logica modală, dar şi că nici una din ele nu ar putea fi respinsă pentru că ar contrazice «adevărata» natură a modalităţii"*[0].

Aceasta pare şi mai ciudat. Din inventarea unui model care satisface unele axiome ale unui sistem formal, dar nu toate, nu putem conchide în mod rezonabil că sistemul formal în ansamblul său este nesatisfăcător pentru totalitatea diferitelor ţeluri pe care le vizează. Cel ce acceptă principiul reducerii în *logica* modală nu se angajează prin aceasta să susţină aplicarea principiului în toate utilizările actuale ale cuvintelor „posibil" şi „necesar", şi cu atît mai puţin nu se angajează în ce priveşte aplicarea sa la utilizări inventate.

Pentru a obţine o apreciere convenabilă a statutului logicii modale în cadrul teoriilor deductive, să examinăm încă o dată natura atribuţiilor logicianului. El doreşte să prezinte acele reguli sau principii de inferenţă care sînt valide pentru toate domeniile de cercetare, dar el nu poate face lista lor în mod independent, deoarece ele nu formează o mulţime finită. De aceea, el porneşte de la anumite principii foarte generale şi arată cum din acestea se pot deriva altele. Fireşte, el speră să stabilească un număr redus de principii generale, din care se pot deriva toate celelalte principii din logică şi vom vedea nai încolo că această ambiţie a fost în adevăr realizată de către Frege în acel domeniu al logicii pe care l-a studiat; dar pentru noment ceea ce ne interesează este maniera în care logicianul derivă irincipii mai slabe din cele mai tari.

Atunci cînd reduce toate principiile silogistice valide la *Barbara* i *Celarent,* Aristotel presupune cunoscut modul de raţionament asupra irincipiilor pe care le studiază. în adevăr, el nu a făcut decît să demon- treze validitatea

fiecărui principiu silogistic diferit de *Barbara* şi '■*elarent,* arătînd că rezultatul aplicării acestui principiu în fiecare az particular se poate obţine întotdeauna, deşi pe o cale mai itortocheată, aplicînd *Barbara* sau *Celarent* împreună cu anumite rincipii simple care nu sînt silogistice. Procedînd astfel, el nu

*' "Interpretations of Modal Logic", *Mind,* n.s. LVI (1952), pp. 153—177. Se citea- după pagina 77 din volumul său *Logical Studies.*
*° *Idem,* p. 88.

generaliza explicit toate cazurile particulare, ci presupunea, destul de corect, că în fiecare tipar în care se poate produce o deducţie cu litere schematice s-ar putea, de asemenea, la nevoie produce o deducţie proprie cu termeni reali. Hrisip a adoptat acelaşi plan atunci cînd s-a ocupat cu un domeniu în care numărul tiparelor raţionamentului valid nu este finit ca în teoria silogistică, şi puţinul pe care îl ştim despre opera lui ne face să presupunem că a aplicat această metodă într-un mod foarte fertil. în secţiunea precedentă am văzut că această tehnică a fost folosită încă o dată de către Frege şi succesorii săi, deşi în lucrările lor problema derivării de reguli noi din reguli vechi cu ajutorul regulilor vechi este întrucîtva obscură din cauză că se vorbeşte despre axiome şi teoreme de ordinul întîi. în sistemul lui Gentzen al schemelor naturale de inferenţă (precum şi în sistemul sche-> melor de desfăşurare pe care l-am obţinut din sistemul lui Gentzen prin modificări neînsemnate) programul este realizat mai limpede decît oricînd înainte prin construirea arborilor demonstrativi care permit cititorului să-şi dea seama dintr-o dată cum este validată o regulă de către celelalte.

Adecvarea metodei urmate de toţi aceşti logicieni eminenţă nu suscita dubii, dar logica poate fi prezentată şi în alt mod, mai explicit, deşi poate mai dificil de înţeles la prima vedere. Aici avem de-a face ma: curînd cu teze decît cu scheme de raţionament, dar tezele noastre sînt principii corespunzătoare schemelor de inferenţă validă (sau d< desfăşurare validă), adică ele sînt propoziţii de ordinul al doilea care se referă la relaţia de implicaţie (sau de cuprindere) şi nu truisme de ordinul întîi, cum sînt axiomele lui Frege; le derivăm unele eiintr altele în concordanţă cu un principiu de tranzitivitate de un ordii mai înalt. Se pare că uneori Lewis are în vedere un asemenea program căci axiomele sale Bl —B5 sînt exemple de principii iniţiale, pe cîni B6 este o versiune atranzitivităţii implicaţiei; dar în loc

de a trat fiecare din aceste propoziţii ca un principiu de inferenţă, el permit doar ca ele să fie folosite ca premise pentru *modus ponens* în loct implicaţiei materiale corespunzătoare. Reciproc, atunci cînd doreşt să utilizeze principiul *modus ponens* din versiunea lui ca premis pentru deducerea altor principii, el adaugă B7 ca o nouă axiom: fără a ţine seama de faptul că acest principiu este conţinut deja i enunţarea regulii *modus ponens.*

Dacă, după cum spune Lewis, implicaţia strictă, spre deosebi de implicaţia materială, *justifică* deducţia; atunci nu poate fi dec deosebire de vocabular între aserţiunea că o propoziţie implică stri pe alta şi aserţiunea că inferenţa de la prima la a doua este valid Atunci de ce prezintă Lewis calculul său în acest fel ? Motivul pa să fie acela că el consideră ca sigură necesitatea unui stil de expune

pe care l-a introdus Frege şi l-au popularizat Whitehead şi Russell. în primul rînd, el presupune de la început că sarcina sa principală este de a introduce un conectiv propoziţional care să poată figura în mod propriu în *modus ponens,* unde Frege a utilizat în chip eronat semnul pentru implicaţia materială (adică condiţionalul lui Filon). Această presupunere îl conduce în mod natural să deosebească în propriul său sistem axiomele de regulile de inferenţă, precum şi să ofere definiţia

$$P \prec Q =_{\text{def}} \sim O\ (P \blacksquare \sim Q)$$

în locul definiţiei

$$P = Q =_{def} \sim (P \bullet \sim Q).$$

în al doilea rînd, el presupune că o teză pentru implicaţia strictă, ?a şi o teză pentru implicaţia materială, trebuie întotdeauna să aibă jn implicant şi un implicat. Deoarece însă este imposibil să prezentăm întreaga logică drept o teorie a inferenţelor cu o singură premisă, el se simte nevoit să introducă o regulă de adjuncţie pentru :are nu poate exista analog în cadrul tezelor pentru implicaţia strictă, în al treilea rînd, el îl urmează pe Frege atunci cînd consideră că)rice enunţ la care se angajează el în calitate de logician trebuie să ie o teză universală ca cea de forma $p \bullet q \prec p$ şi nu o aserţiune le felul aceleia că orice propoziţie de forma $P \bullet Q \prec P$ este adevărată. Yceastă opinie îl conduce în mod natural să adopte o regulă de sub- tituţie care are un statut cu totul diferit de toate tezele sale. Pe curt, fiecare dintre regulile de inferenţă pe care el le adaugă la axiome găseşte locul din cauza nevoii de a acoperi restricţiile pe care le-a cceptat atunci cînd a formulat aceste axiome.

Să încercăm deci să ne eliberăm mintea de influenţa trad'ţiei care -a format recent şi să încercăm să desemnăm un sistem de logică îodală în care noţiunea de implicaţie este luată ca fundamentală i în care se permite a scrie *P, Q/P • Q* ca o altă versiune a acelui rincipiu care îndeobşte se exprimă prin introducerea schemei de îferenţă ? . Sau, mai general, să încercăm a concepe un sistem

i care principiile de cuprindere se derivă într-un mod natural (adică ituitiv evident) din alte principii care, la rîndul lor, sînt selecţionate ʟ virtutea caracterului lor firesc. Pentru a defini mai bine problema, ʟ începem prin a analiza cum se reproduce într-o formă explicită dică fără presupuneri implicite) raţionamentul înfăţişat în urmă- >area schemă simplă de desfăşurare:

$\frac{P \hat{} Q}{Q}$ (5) ^(6).

Se poate spune că aici principiul *~ Q, P => Qj ~ P* se derivă din principiile indicate prin numerele de ordine de la dreapta liniilor orizontale, şi anume : **/P, ~ P; P => Q, P/Q* şi *Q, ~ Ql*.* Dar astfel presupunem deja că un enunţ de forma T/Ă (adică cu bară oblică) poate fi enunţat în mod corect dacă şi numai dacă o desfăşurare de forma $\overline{\text{r}}$ este validă. Din motive de convenabihtate, se folosesc A majuscule greceşti pentru a reprezenta *secvenţe* de formule, inclusiv secvenţele vide. Apoi presupunem că rezultatul unei desfăşurări e

r *p* Ă
A

se poate înfăţişa sub forma T, 0/A, A, unde *P* este tăiat deoarece nu e nici formulă iniţială, nici formulă finală a întregii figuri. Apoi scriind *~ Q, P Ql ~ P* în loc de *P Q, ~ Qj ~ P* luăm ca sigui că ordinea formulelor anterioare barei oblice poate fi schimbată după voie. Dacă încercăm să explicităm toate aceste presupuneri, puten reformula raţionamentul în felul următor, într-un stil explicit d< ordinul al doilea

~~*Q ~ Ql,*~~ <~~*bară obUcă*~~> ~~*P JQ PIQ*~~ (bara oblică) ~~p~~ ° ~ p (bară oblică) (permutare) • ' PoQ/Q, <tăietură>
~~————————~~8, ~~*P^QI~ P.*~~---------- (tăietură)

Aici cuvintele din dreapta liniilor se referă desigur la permisiunii care justifică trecerile noastre. Pentru a trece la reformularea uno raţionamente mai complicate trebuie să admitem şi alte permisiuni şi anume: una care ne dă dreptul să eliminăm redundanţele de orie fel, de ambele părţi ale barei oblice, şi două care ne îngăduie să trecei peste *clasele* intermediare de formule atunci cînd enunţăm principiil stabilite cu ajutorul schemelor de desfăşurare din logica generali De asemenea, deşi nu este strict necesar în vederea reformulării expl cite, putem la nevoie adopta licenţa, în mod evident nedăunătoari de adăugare a elementelor după voie, fie înainte, fie după bara oblic dintr-o formulă care exprimă un principiu corect. De asemene; din orice enunţ corect de forma T/P considerat împreună cu premise r putem conchide cu certitudine *P.*

Ajungînd însă aici, vedem că putem simplifica mai departe sarcii noastră, dar nu considerînd ca axiomatice principiile corespunzătoa: schemelor de desfăşurare iniţiale, ci adoptînd pentru fiecare sen formal o unică regulă de ordin mai înalt, care fixează utilizarea ; în raport cu bara oblică. într-adevăr, asemenea reguli adăuga permisiunilor generale pe care le-am notat mai sus fac posibilă deriv

ia tuturor principiilor iniţiale de cuprindere din unicul principiu *p*

P care corespunde cu schema de inferenţă banală — •

Cu aceasta, noul nostru sistem ia următoarea formă:

$$\frac{p}{r, P/A\ 0/P, A}$$

$$\frac{r, \textcircled{C}/A, A \quad r, (A/0)/(A/B)}{\blacksquare\ r/[(A/0)/(A/B)] \quad \{r, 7->/A\} \quad 0/\{F^*\}, A}$$

$$\frac{r, \textcircled{C}/A, A}{r, p/g, A}$$

$$\frac{r/p. A}{r, 0/A, A}$$

$$\frac{r, \{F^*\}/A \ \{Q\}Fx, A\}}{r, 0/A, A}$$

$$\frac{r/(A/\textcircled{C})}{4'7^{\wedge}}$$

$$\frac{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}{\Gamma/P}$$

$$\frac{\Gamma/P}{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}$$

Şi mai înainte, fiecare majusculă elină trebuie înţeleasă ca o referire >reviată la orice şir de propoziţii alese după voie, incluzînd şi şirul vid. Aşa, de exemplu, „A, A/B, B” re au un singur membru sau chiar nici unul. Această utilizare a erelor eline şi chiar conţinutul unora dintre reguli sînt sugerate a doua parte a lucrării lui Gentzen, pe care am citat-o în secţiunea terioară, deşi sistemul pe care îl elaborează acolo diferă de cel pe re îl

examinăm aici**********.
Cu unica excepţie a lui a5, pe care o vom examina mai jos, regulile î prima grupă sînt toate legate de permisiunile introduse mai sus şi nici a din ele nu prezintă vreo dificultate de interpretare. în expresia p al trebuie să utilizăm litera cursivă *P* în loc de T, deoarece — r ne-ar obliga şi la — care este inacceptabilă. Regula a2 permite adăugarea elementelor de o parte sau de alta a barei oblice din expresia unui principiu. Deoarece însă, dintre cele două secvenţe reprezentate prin literele 0 şi A una sau amîndouă pot fi nule, regula nu *pretinde* vreo adăugire de ambele părţi. Aici şi în regulile următoare admiterea secvenţelor nule simplifică prezentarea. Regula a3 permite operaţia de tăietură în logica primară, iar regula a4 ne permite la nevoie să stabilim forma lui Lewis pentru *modus ponens,* în timp ce a6 şi a7 sînt pentru logica generală ceea ce ot3 este pentru logica primară. Ca şi mai înainte, acoladele se utilizează pentru a indica mulţim; de propoziţii eventual infinite. Astfel, mulţimea propoziţiilor indicată prin semnul complex {r/Fx,A} este cea pe care trebuie să o stabilin construind o demonstraţie pentru formula r/Fx,A, unde *x* se ia CE variabilă liberă.

în grupa următoare, pi şi p2 stabilesc în mod clar echivalenţi celor două moduri diferite de a prezenta principiile implicaţiei. Aic expresia se poate considera ca însemnînd: *orice inferenţă în con* p *formitate cu schema — este validă.* Similar, p3 permite reaşezare după voie a formulelor care figurează de o parte a barei oblice î expresia unui principiu de cuprindere într-o parte sau alta, în tini ce p4 permite eliminarea redundanţelor de o parte sau alta. Dup cum spunea Leibniz în legătură cu unul din calculele sale, noi n ţinem seama aici nici de ordine, nici de repetare. într-adevăr, de semnele pe care le scriem de o parte sau alta a barei oblice trebu să fie ordonate de la stînga la dreapta şi pot include unele duplicăi în fapt aceste amănunte nu au importanţă pentru teoria noastr Relaţia de cuprindere care ne interesează este o relaţie care are 1(între *mulţimi de propoziţii* şi nu între secvenţe de formule, iar aces două reguli servesc doar pentru a arăta că unele trăsături ale simb lismului nostru sînt nerelevante. Tocmai de aceea ele au fost grupa împreună cu pi şi p2.

**********[1] Pentru formularea celui de-al doilea sistem al său, Gentzen utilizează unele idei hiar unii termeni provenind din memoriul lui P. Hertz ,,t)ber Axiomensysteme fur ebige Satzsysteme", *Mathematische Annalen,* CI (1929), pp. 457—514.

în a treia grupă avem cîte o regulă specială pentru fiecare dint diferitele semne formale în uz. în parte, aceste reguli sînt adapta după regulile lui K. R. Popper†††††††††††††††††††††††††††††††††††††††, fiecare dintre ele avînd forrB unei licenţe de substituţie care guvernează utilizarea unui semn f<H mal împreună cu semnul barei oblice. **H**

La un loc, aceste reguli sînt suficiente pentru reconstruirea întregii ogici aşa cum este considerată ea îndeobşte. Iată de exemplu o lemonstraţie a unui principiu care corespunde la una dintre cele nai complicate axiome din *Principia Mathematica:*

(«n (an ------—------(Pl)
$\underline{Q \quad RIQ \overset{\frown}{R}^{p}}$ $\underline{{}^{p}ve/^{p}\ ve}$, „
$\underline{pve/p.e}$

. Acesta este evident un raţionament valabil, dar nd trebuie să credem că el aruncă o umbră de îndoială asupra principiului reducerii tari, aşa cum este prezentat în formula ~ □ *P/[f_* ~ □ Fi şi nu trebuie să uităm că în definitiv putem spune ceea ce vrem **sa** spunem cu privire la afirmaţia lui Aristotel fără a ne referi la eJ ca atare. într-adevăr, n-ar fi nici un pericol de confuzie dacă ani spune pur şi simplu că „afirmaţia lui Aristotel din *Analiticile prima* (28[a]30) este un adevăr necesar", deşi nimeni n-ar putea spune daci judecata noastră este corectă sau nu, pînă nu face cunoştinţă **cil** conţinutul afirmaţiei lui Aristotel. **I**

în dorinţa noastră de a acorda noţiunii de modalitate logică Cee.-l ce i se cuvine am fost conduşi la a prezenta logica drept teorie generali a acelei relaţii dintre mulţimi de propoziţii pe care o numim „cuprindel re". în secţiunea anterioară a devenit clar că semnele formale (adie® logice) pentru conjuncţie, disjuncţie, negaţie, conectivul lui Filo **îl** universalitate şi existenţă, ar fi acele semne al căror sens deplin s-aB putea da prin enunţarea regulilor de desfăşurare pentru propoziţiilB exprimate prin intermediul lor. Dar în noua noastră versiune a logici® noţiunea de cuprindere este luată ca fundamentală, iar semnele **foii** male ale versiunilor mai uzuale se introduc cu ajutorul unor regul care pot fi tratate ca definiţii. Este adevărat că regulile din a treil grupă a noastră nu permit prin ele însele eliminarea semnelor

†††††††††††††††††††††††††††††††††•• "On the Theory of Deduction", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche A demie van Wetenschappen,* LI (1948), pp. 173 — 183, 322—331.

formali în toate contextele în care ele pot fi folosite. Dar aceste reguli determini sensul semnelor în mod complet, fixînd rolul lor în raţionamenl Fără îndoială că cuvîntul uzual „şi” poate să sugereze nuanţe pentil care nu se găseşte nimic în yl, dar utilizarea logică a punctului vizează să acopere tocmai sensul permis de către această regulă, nimic mai mult sau mai puţin; la fel, fiecare dintre semnele formale are exact sensul pe care îl permite regula respectivă. Deşi fiecare asemenea regulă priveşte doar apariţia unui semn formal de o anumită parte a barei oblice, de fapt ea este suficientă pentru că, împreună cu regulile generale date anterior, stabileşte posibilităţile de introducere ori eliminare a semnului respectiv sau înainte de bara oblică, sau după ea. De exemplu, expresia T/P-^,A este echivalentă în tărie cu perechea de propoziţii r/P,A şi r/^,A; iar *r/(x)Fx,* A se poate înlocui prin semnul complex {r/Px,A}. Pe scurt, semnele formale prezintă pentru logician un interes deosebit, deoarece ele se pot utiliza ca auxiliare în prezentarea teoriei cuprinderii; reciproc, semnele care nu se pot defini ca acestea în asociaţie cu semnul cuprinderii nu îşi găsesc locul în logică.

Deoarece există o deosebire de cea mai mare importanţă între o mulţime care poate fi specificată prin enumerarea membrilor săi şi una care poate fi specificată doar prin indicarea unei trăsături comune a tuturor membrilor săi, nu este de mirare că logica generală (sau funcţională), care se ocupă cu relaţii între mulţimi eventual infinite de propoziţii, specificate prin referire la funcţii propoziţionale, este mult mai complicată decît logica primară (adică propoziţională), care se ocupă doar cu relaţii între mulţimi finite de propoziţii. însă regulile noastre de bază al—7 sînt toate simple şi chiar banale (dacă acest cuvînt poate fi utilizat fără a implica un dispreţ). Nici aceasta nu este de mirare, căci întrucît logica se ocupă cu proprietăţile generale ale cuprinderii şi nu cu stabilirea acestei relaţii între mulţimi de propoziţii referitoare la domenii particulare de studiu, ea trebuie să fie *fundamental simplă.*

5. *Propuneri de logici alternative*

în acea versiune a logicii pe care am considerat-o mai sus,

noţiunea undamentală se identifică prin reguli ca generalizare a relaţiei care ustifică inferenţa şi de aceea nu încape îndoială în ce priveşte interpretarea semnului ei de bază. Dar un sistem ca cel al lui Frege din *3egriffsschrift* sau ca cel din *Principia Mathematica* poate fi elaborat ară a urmări vreo interpretare a semnelor sale, iar atunci cînd este tudiat în acest mod abstract este util să-l considerăm împreună ir alternativele sale.

în memoriul din 1921, în care a introdus tabelele de adevăr pentru logica elementară‡‡‡

pŞfqt, ■ • pm-i q_m-i',* (IV) dacă propoziţiile din *P* se exprimă prin p_{lt} p_2, *..*$p_{m_}$*i* atunci propoziţiile din ~ $_mP$ se vor exprima prin

~ {pjPlp$_2$ V *... p*$_{m_}$*-i), ~* (/>! V p_2 V *...* /$^>{}_{m_}$i)V(^>$_1$ • p_2 *Pm-1}> • • • ~ (pj^pz^ . . . Pm-l)^(Pm-2 ' Pm-1)-*

Am putea spune că sistemul w-valent al lui Post este o logică alter nativă ? Răspunsul la această întrebare va depinde de sensul pe car îl dăm cuvîntului „logică". Dacă ne restrîngem să aplicăm aces nume fiecărui sistem care are anumite afinităţi formale cu sistemr lui Frege, putem spune că el este o logică. A proceda astfel nu est o absurditate, deoarece cuvîntul „geometrie" a fost lărgit toc nu pe această cale. Dar dacă ne permitem o asemenea libertate, trebuie s recunoaştem că cu o asemenea uzanţă tehnică un sistem formal num logică nu mai presupune vreo legătură cu raţionamentul. în particular, nu putem presupune că producerea de logici alternative în acest sens al cuvîntului „logică" ar putea să arate sau să nu arate că sistemul lui Frege ar fi inadecvat scopurilor pentru care a fost proiectat sau că ar fi măcar strict convenţional[§§§

problema lui Aristotel cu privire la viitorul contingent**********. Abordarea sa el o explică după cum urmează:

„Aş putea presupune fără contradicţie că prezenţa mea în Varşovia într-un anumit moment de timp din anul următor, de exemplu în amiaza zilei de 21 decembrie, nu poate fi afirmată în momentul de faţă nici pozitiv, nici negativ. De aceea, este *posibil dar* «w *necesar* ca la timpul menţionat eu să fiu prezent în Varşovia. Dacă admitem această supoziţie, atunci enunţul «Voi fi prezent în Varşovia în amiaza zilei de 21 decembrie din anul următor* nu este în momentul de faţă nici adevărat, nici fals. într-adevăr, dacă ar fi adevărat în prezent, atunci prezenţa mea viitoare în Varşovia ar fi necesară, ceea ce contrazice ipoteza, iar dacă ea ar fi falsă în prezent, prezenţa mea viitoare în Varşovia ar fi imposibilă, ceea ce iarăşi contrazice ipoteza. Aşadar, enunţul considerat nu este în prezent nici adevărat, nici fals şi trebuie să aibă o a treia valoare diferită de valoarea 0, adică fals, şi de valoarea 1, adică adevărat. Putem indica această valoare prin «1/2 » : aceasta este «posibilul* care apare ca o a treia valoare impreună cu «falsul» şi «adevăratul ». Acesta este mersul gîndirii care a dat naştere sistemului trivalent pentru logica propoziţională”††††††††††††††††††††††††††††††††.

Dacă trebuie să avem trei valori de adevăr, atunci funcţiile de adevăr trebuie să fie redefinite sau, mai precis: definiţiile lor trebuie să fie extinse astfel încît să acopere cazurile pentru care unul sau mai multe argumente iau valoarea i . în acest context vom introduce semnul [P] ca o abreviere pentru ,,valoare de adevăr a lui *P”* şi, pentru a uşura comparaţia, vom utiliza notaţia lui Peano şi Russell, şi nu notaţia lui Lukasiewicz. Definiţiile pe care le adoptă el pentru condiţionalul lui Filon şi pentru negaţie sînt cele din matricea următoare:

	1	1/2	0	
1	1	1/2	0	0
1/2	1	1	1/2	1/2
0	1	1	1	1

Coloana din extrema dreaptă indică faptul că dacă [P]=0 sau

********** „O logice trojwartosciowej”, *Ruch Filozoficzny,* V (1920), pp. 169 — 171.

†††††††††††††††††††††††††††††††††††† „Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkiils”, *'omptes rendus des seances de la Societe des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III,* <XIII (1930), pp. 51 — 77. (Traducerea română a articolului a apărut sub titlul *Observaţi filozofice privind sistemele polivalente de calcul propozitional,* în *Logică şi filozofie,* Ed. >olitică, 1966, pp. 295-320).

[P] = 1, atunci [~P] nu se schimbă şi că pentru [P] = avem [~P] = Similar, în definiţia lui P => *Q* cazurile vechi se tratează aşa cum este uzual, iar cazurile noi se rezolvă după principiul următor: dacă valoarea antecedentului este mai mică sau egală cu valoarea consecventului, atunci valoarea condiţionalului este 1 ; în caz contrar, această valoare este — •

2

Este important să înţelegem că în acest sistem trivalent semnele pentru funcţiile de adevăr nu pot păstra exact aceleaşi relaţii pe care le-au avut în sistemul bivalent şi că unele formule care sînt tautologice în sistemul bivalent pot înceta să mai fie tautologice atunci cînd sînt considerate ca formule în sistemul trivalent. Astfel, Lukasiewicz introduce disjuncţia prin definiţia

[P V (?] = [(P o (?) o Q].

Această echivalenţă pare neobişnuită, dar ea este aleasă pentru a asigura că disjuncţia în sistemul trivalent va avea aceeaşi valoare ca şi termenii săi atunci cînd amîndoi termenii au aceeaşi valoare iar în caz contrar va avea cea mai mare dintre cele două valori. Apli cînd definiţia la PV ~ P, obţinem 1 ca valoare a întregului numa dacă unul dintre termenii disjuncţiei are această valoare, iar în ca: contrar obţinem — ; se pare că acesta este rezultatul urmărit d Lukasiewicz. Din nefericire însă, pentru definiţia pe care o dă conjuncţiei *P • Q* consecinţele nu mai sînt tot atît de bune, căci aici el utilizează regula lui De Morgan

[P .<?]= [>(~P V ~0],

urmărind fără îndoială să asigure că o conjuncţie va avea aceeaşi valoare ca termenii săi atunci cînd aceştia au valori egale, iar în caz contrar va avea cea mai mică dintre cele două valori; iar rezultatul este că pentru *P. ~ P* obţinem valoarea 0 numai dacă *P* are una dintre cele două valori extreme; în caz contrar obţinem — , ceea ce pare foarte straniu.

Pe lîngă semnele obişnuite pentru funcţiile de adevăr, Lukasiewicz introduce un nou semn funcţional presupus a avea sensul de „Posibil”. După practica sa uzuală, el ia în acest scop o literă mare şi anume Litera M, iniţiala

cuvîntului *moglich.* Noi vom utiliza semnul în formă de romb al lui Lewis, dar trebuie să precizăm că noţiunea de posibilitate a lui Lukasiewicz este cu totul diferită de aceea a lui Lewis.

Definiţia pe care Lukasiewicz a adoptat-o pentru semnul său de posibilitate (la propunerea elevului său A. Tarski) este dată de către echivalenţa [O P]=[~P=>P], La prima vedere, aceasta este o definiţie foarte surprinzătoare deoarece ~ P *=> P* este antecedentul din *consequentia mirabilis* prin care demonstrăm adevărul lui P în sistemul de logică bivalentă; dar paradoxul se înlătură atunci cînd Ine amintim că definiţia aparţine unui sistem trivalent. Dacă o propoziţie se poate deriva din propria ei negaţie, atunci cel puţin ea nu poate fi falsă, indiferent de numărul de valori de adevăr pe care îl admitem. în sistemul bivalent, proprietatea este suficientă pentru a asigura adevărul; în sistemul trivalent însă ea garantează doar posibilitatea. Cu alte cuvinte, definiţia lui Tarski pare convenabilă deoarece funcţia pe care el o egalează cu posibilitatea ia valoarea zero atunci cînd argumentul are această valoare, iar în caz contrar La valoarea unu: ceea ce a definit el este posibilitatea în sensul că ixclude falsitatea.

Reuşind pînă acum în demersul său, Lukasiewicz s-a îndreptat ;pre generalizarea noţiunii de sistem polivalent, stabilind definiţii centru negaţie şi condiţionalul lui Filon, care se pot aplica la orice îumăr de valori cu singura condiţie ca ele să fie reprezentate în interului de la 0 la 1. Aceste definiţii sînt următoarele:

P] = 1 - [P]
[P = (?] = 1 pentru [P] [(?]
[P = 0] = 1 - [P] + [Q] pentru [P] > [<?].

Dacă alegem ca valori permise numai limitele intervalului, adică numai numerele 0 şi 1, atunci aceste definiţii furnizează sistemul bivalent obişnuit. Dacă adăugăm ca valoare permisă ±, obţinem sistemul trivalent pe care l-am examinat acum. După Lukasiewicz, e posibil de asemenea să'construim un sistem pentru 4 sau 5 sau pentru un număr arbitrar de valori de adevăr; dar îndată ce permitem distincţii de grad pentru posibil şi depăşim astfel sistemul trivalent, pare cel mai firesc să admitem o infinitate de grade, ca în calculul probabilităţilor, fapt ce ne conduce la un calcul propoziţional cu o infinitate de valori, pe care el îl

preferă. Poate că el credea că un asemenea calcul ar putea fi folosit în prezentarea teoriei probabilităţilor. De fapt însă, calculul n-a fost dezvoltat în această direcţie, şi este îndoielnic ca el să fi admis asemenea dezvoltare deoarece se pare că în acest sistem nu avem o interpretare adecvată pentru semnul posibilităţii. Dacă aplicăm aici definiţia lui Tarski, obţinem rezultatul curios

[O P] = 1 pentru [P] > >

[O P] = 2[P] pentru [P] <

Relaţiile dintre diferitele sisteme sînt următoarele. Sistemul trivalent este o parte proprie a sistemului bivalent, în sensul că toate teoremele sale sînt şi teoreme ale acestuia din urmă, iar sistemul cu o infinitate de valori este o parte proprie a sistemului trivalent în acelaşi sens, deşi puţinele teoreme din *Principia Mathematica* ce supravieţuiesc în sistemul trivalent se pierd atunci cînd se trece la sistemul cu o infinitate de valori. Cele mai importante teoreme din sistemul bivalent care nu sînt valide în sistemele polivalente sînt cele care au de-a face cu un raţionament apagogic (reductio ad absur- dum) de forma celui care pare să fi dat naştere la frămîntarea din teoria mulţimilor; de exemplu:

(~ = A 3 A
(P ° ~ P) = ~ A
(P 3 ~ ° ~ *P*-

Lukasiewicz a elaborat sistemul său trivalent într-o măsură destu de coerentă şi i-a adăugat o interpretare care îl face să semene cu c logică în cel mai strict uz al acestui cuvînt; dar sistemul său nu este legat de logica bivalentă aşa cum consideră el. în cursul întregii sal< discuţii el are în vedere acea utilizare a cuvîntului „posibil" în cadru căreia cineva care este întrebat cu privire la viitor poate să răspund: că este posibil că o bătălie navală va avea loc în ziua următoare, într-un studiu mai recent, în care prezintă un sistem diferit de logică modală, Lukasiewicz admite că a avut în vedere alte concepţii ale posibilităţii, dar continuă să argumenteze pe baza ipotezei că O P şi ~ *P* sînt incompatibile[39]. Or, desigur că nu ar fi cinstit ca cineva să spună „Este posibil că astăzi a avut loc o bătălie navală" atunci cînd el ştie bine că nici o bătălie navală n-a avut loc, deoarece în acest context „este posibil..înseamnă, după cum

spunea Frege, că vorbitorul nu ştie nimic despre contrariu. Dar această utilizare nu implică existenţa unei a treia valori de adevăr, între adevăr şi fals, şi nici nu s-ar părea că cineva ar dori să interpreteze lucrurile astfel, afară doar dacă n-ar fi îngrijorat de problema lui Aristotel asupra viitorului contingent. Am argumentat deja că problema provine din ideea confuză că adevărul este o proprietate care aparţine unui enunţ la un moment de timp dat şi este suficient să adăugăm aici că cele trei valori ale lui Lukasiewicz nu apar ca valori de adevăr şi nici măcar ca valori pur modale, ci mai curînd ca valori de certitudine.

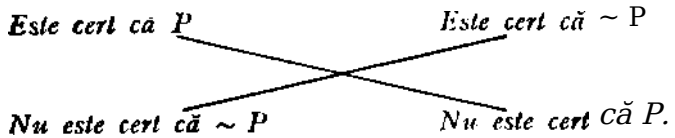
Am observat deja că odată cu principiul terţului exclus el a abandonat şi principiul necontradicţiei. Aceasta face ca sistemul în ansamblu să fie inacceptabil. Dacă însă defectul ar putea fi înlăturat printr-o ajustare care să satisfacă pe Lukasiewicz şi pe cei care sînt preocupaţi de problema viitorului contingent, atunci se pare că sistemul rezultat ir admite şi interpretarea următoare:

[P] = 1 . . . *Este cert că P.*

[P] = -i ... *Nu este cert că P şi nu este cert că ~ P.*

[P] = 0 . . . *Este cert că* ~ P.

)ar, departe de a impune abandonarea logicii bivalente uzuale, această iterpretare presupune distincţia uzuală dintre adevăr şi fals şi uti- zarea uzuală a cuvîntului „nu". Aplicînd procedeul pătratului poziţiilor, putem înfăţişa relaţiile dintre diferitele expresii după um urmează:



" „A System of Modal Logic", *The Journal of Computing Systems,* I (1953), pp.

1 — i 49. A se vedea de asemenea cartea sa asupra silogisticii lui Aristotel din acelaşi volum şi locaşii [illegible]

Aceasta revine la a spune că cele două susţineri de certitudine sînt contrarii şi că fiecare din ele implică ca subalternă o propoziţie care este contradictorie cu cealaltă. Pe de altă parte, cele două negaţii de certitudine sînt subcontrarii, ele putînd fi amîndouă adevărate (conform cu principiile logicii bivalente uzuale) dar neputînd fi amîndouă false. Aceste relaţii sînt analoage celor care au loc între cele

patru expresii modale „necesar”, „imposibil” „posibil” şi „nenecesar” ; lucrul nu este de mirare, deoarece „cert” se poate considera ca o abreviere pentru „necesar relativ la ceea ce ştim”. Aici însă, elementul logic este noţiunea generală de necesitate (sau noţiunea de posibilitate care în analiză poate fi luată ca noţiune fundamentală în locul necesităţii) şi nicidecum noţiunea de cunoaştere; deşi funcţiile modale pure nu pot fi definite cu ajutorul unor tabele de adevăr asemănătoare funcţiilor din logica primară bivalentă, ele nu pretind o teorie alternativă la logica primară bivalentă.

într-un capitol ulterior vom avea prilejul să examinăm o alternativă la logica clasică care a fost propusă de către L.E.J. Brouwer şi A. Heyting în vederea eliminării paradoxurilor din filosof ia matematicii. Specificul acestui sistem rezidă în aceea că el nu conţine principiul terţului exclus nici ca axiomă, nici ca teoremă. Cel puţin aşa afirmă autorii săi; dar vom vedea că este rezonabilă opinia după care ceea ce ei numesc principiul terţului exclus nu este legea cunoscută de obicei sub acest nume.

Dacă, pornind de la sistemul de logică primară al lui Frege, ne întrebăm ce trebuie să reţinem într-un calcul abstract căruia i st poate atribui denumirea de logică pură pe baza similarităţii salt parţiale (în ce priveşte structura formală) cu sistemul lui Frege, nt ne putem aştepta la un răspuns precis, deoarece numai intuiţia a: putea reglementa o asemenea extindere a accepţiilor. Dar eventua am putea spune că este rezonabil să ne aşteptăm ca acolo să funcţionez, regulile de substituţie şi detaşare şi unele formule corespunzătoar tezelor principale din sistemul lui Frege. Dacă presupunem că sis temui nou trebuie să aibă şi constantele lui Frege, atunci am pute considera, de exemplu, că el trebuie să conţină cele patru formul

$$P \Rightarrow \text{---} P$$
$$\sim P \supset (P \quad \{p\ g)$$
$$P \supset [\sim ? = \sim \{p \quad ?)\text{L}$$

care de fapt se găsesc nu numai în sistemele polivalente ale lui Luk siewicz, dar şi în sistemul elaborat de Heyting pentru logica 1 Brouwer, în care nu funcţionează principiul terţului exclus. D A. Tarski[40] a arătat că orice

[40] ,,Uber Erweiterungen der

sistem care satisface aceste condiţii şi nu este contradictoriu poate fi extins în mod consistent şi complet doar într-un singur fel, extinderea aceasta fiind tocmai sistemul bivalent obişnuit. El a demonstrat de asemenea teoreme asemănătoare pentru calcule alternative, care diferă de sistemul lui Frege fie prin aceea că utilizează doar semnul pentru implicaţia materială, fie prin aceea că utilizează semnele conjuncţiei şi disjuncţiei împreună cu semnele pentru implicaţia materială şi negaţie. Se pare deci că chiar din punct de vedere pur formal sistemul bivalent uzual are un statut aparte printre sistemele deductive, care pot fi denumite în mod rezonabil logică, deoarece toate aceste sisteme nu sînt decît fragmente ale sale. Pe scurt, ele nu sînt alternative la logica clasică în sensul in care geometria lui Lobacevski este alternativă la geometria lui Euclid.

în secţiunea anterioară am încercat să arătăm că logica clasică poate fi înfăţişată ca teorie generală a unei relaţii dintre mulţimi fie propoziţii, relaţie pentru care implicaţia este un caz particular. IDacă prezentarea noastră este acceptabilă (iar ea pare să concorde rU concepţia tradiţională a logicii ca ştiinţă a principiilor raţionamentu**lui** valid în orice domeniu de cercetare), atunci oricine susţine o lltfernativă la logica clasică obiectează implicit, într-un fel sau altul, împotriva noţiunii clasice de implicaţie. într-adevăr, reiese că nu lutem opera cu o logică de felul celor propuse de Lukasiewicz şi Brouwer, conservînd totodată noţiunea de implicaţie utilizată în mgica clasică. Dar cum am putea abandona această noţiune şi pentru Bare motiv ? Prin ce argumentare s-ar putea demonstra că concepţia loastră generală cu privire la demonstraţie trebuie să fie schimbată ? ■ăfă îndoială, se poate arăta că o anumită argumentare particulară **Ba** care ne-am obişnuit este eronată, dar nu se poate arăta că întreaga Boastră concepţie asupra raţionamentului trebuie revizuită. Şi totuşi. Bacă analiza noastră este corectă, aceasta este sarcina pe care şi-o ■ane orice pretins reformator al logicii,

FILOSOFIA LOGICII DUPĂ FREGE

---

unvollständigen Systemen des Aussagenkalkiils", *Ergeb-* Ise *eines mathematischen Kolloquiums,* VII (1934 — 1935) pp. 51—57 ; memoriul a intrat polumul publicat în limba engleză, *Logic, Semantics, Mctamathematics,* pp. 393 — 400.

1. *Expresie, desemnare şi adevăr*

Puţini logicieni se menţin la filosofia logicii a lui Frege în totalitatea ei§§§

putem permite o asemenea exprimare), nu este acelaşi lucru cu faptul că „2 + 2 = 4” este adevărat. în alte locuri, Frege vorbeşte despre Adevăratul şi Falsul pur şi simplu. Fără îndoială, această terminologie este menită să sugereze că el are în vedere două obiecte şi numai două; dar ce sînt aceste obiecte ? în accepţia uzuală, „Adevăratul” ar fi considerat ca însemnînd acelaşi lucru ca „ceea ce este adevărat”, dar lucrurile care pot fi adevărate într-un sens primar sînt judecăţile sau, cum ar spune Frege, gîndurile (adică ceea ce propoziţiile exprimă, spre deosebire de ceea ce se presupune că ar desemna), şi pot exista o infinitate de judecăţi exprimate de propoziţii deosebite. Trebuie să înţelegem atunci că cele două valori de adevăr ale lui Frege sînt tocmai atributele adevăr şi fals? Acestea constituie într-adevăr o pereche de obiecte, — într-un sens larg al cuvîntului „obiect” —, şi ele pot fi denumite în mod rezonabil valori, într-un sens care nu are nimic de-a face cu substituirea variabilelor din matematică. Dar pare absurd să spunem că fiecare propoziţie indicativă adevărată desemnează adevărul, sau reprezintă adevărul, întrucît propoziţiile sînt semne de cu totul alt gen decît semnele despre care putem susţine că reprezintă propriu-zis adevăr (de exemplu, cuvîntul „adevăr” însuşi, sau expresia „ceea ce Pilat din Pont dorea să fie definit”). Pentru anumite ţeluri, am putea admite eventual convenţia de a scrie:

5 este un număr prim = adevăr,

ca un substitut pentru „Este adevărat că 5 este un număr prim”, dar posibilitatea refacerii limbajului nostru în această manieră nu justifică deloc afirmaţia lui Frege. Dacă am decide să scriem „ = adevăr” după anumite propoziţii indicative şi „ = fals” după altele, cele două specii nu şi-ar păstra semnificaţiile lor actuale, ci ar ajunge să fie privite într-un alt fel, ca semnele pe care le utilizează învăţătorul pentru a nota răspunsurile date de elevi la întrebările sale.

în articolul său *Uber Sinn und Bedeutung,* Frege încearcă să facă plauzibilă teoria sa, argumentînd că ea ar fi implicată de deosebirea de atitudine faţă de ficţiune şi istorie. într-un poem epic sau roman, propoziţiile, spune Frege, au sens, însă ele nu sînt caracterizate de regulă ca adevărate sau false, deoarece nu sînt concepute ca avînd referinţă. Propoziţiilor unui istoric însă le atribuim referinţă în aceeaşi măsură :a şi sens. într-adevăr, dacă susţinem cu toată seriozitatea că Ulisse i fost aruncat la ţărmul Itacăi în timp ce era cufundat în somn, sîntem-i ?ata să arătăm că cuvîntul

„Ulisse” desemnează un obiect, iar inte- esul pe care-l manifestăm pentru referinţa unei părţi a propoziţiei espective devine de înţeles numai dacă presupunem că şi propoziţia. în întregul ei, desemnează ceva. La fel cum în cazul înţelegerii unei propoziţii oarecare, indiferent dacă ea ţine de ficţiune sau de istorie, sensul unei părţi este relevant pentru că ne ajută să determinăm sensul întregului, tot astfel, după cum se pare, într-o cercetare asupra adevărului unui enunţ istoric referinţa unei părţi este relevantă pentru că ne ajută să determinăm referinţa întregului, şi anume valoarea sa de adevăr.

Argumentaţia de mai sus este cea mai bună apărare a lui Frege, dar ea nu justifică încercarea de a separa sensul unui enunţ de referinţa sa. Dacă presupunem că o propoziţie indicativă de ficţiune are exact acelaşi sens pe care l-ar fi avut într-o naraţiune istorică, atunci sîntem obligaţi să admitem şi faptul că aceeaşi propoziţie este utilizată pentru a formula un enunţ adevărat sau fals. Or, potrivit explicaţiilor date chiar de Frege, nu avem nevoie de nimic altceva, deoarece o judecată, adică un gînd complet exprimat printr-o propoziţie indicativă, este întotdeauna ceva ce trebuie să fie adevărat sau fals. Desigur, este important să deosebim propoziţiile unei ficţiuni de propoziţiile unei relatări istorice, dar nu este cazul (cum presupune Frege) că propoziţiile de primul fel ar avea sens fără referinţă, în timp ce celelalte ar avea atît sens cît şi referinţă. Deosebirea fundamentală rezidă mai curînd în aceea că istoricii fac comunicări, pe cînd istorisitorii de poveşti pretind numai că fac comunicări; de unde rezultă că numeroase propoziţii de ficţiune au semnificaţie numai în sensul cu totul aparte în care spunem că are semnificaţie „John are peniţa soţiei grădinarului”, atunci cînd figurează sub titlu de exemplu într-un manual de gramatică. Ele sînt semne compuse care *ar putea fi* întrebuinţate în anumite condiţii pentru comunicare, şi tocmai de aceea *sînt* folosite într-adevăr de povestitorul care, pentru a ne distra, susţine că aceste condiţii sînt îndeplinite. Dacă cineva înţelege greşit situaţia şi îşi închipuie că povestitorul face o comunicare autentică, atunci el, în mintea sa, conferă un sens complet fiecărei propoziţii, ceea ce, după cum spune Frege, presupune de obicei că anumite expresii sînt desemnări genuine ; dar nu avem vreun temei potrivit pentru a spune că aceasta implică

tratarea propoziţiilor povestitorului în calitate de desemnări ale valorilor de adevăr. I

Teoria lui Frege provine din presupunerea sa că orice semn complet trebuie să aibă în acelaşi timp atît un sens cît şi o referinţă ; la aceasta l-au condus preocupările sale în legătură cu denumiri şi cvasidenumiri Cînd dintr-un motiv sau altul începe să ne intereseze studiul limbi şi începem să ne întrebăm asupra semnificaţiei, este poate natura să căutăm indicii în situaţiile în care am îmbogăţit limba prin pro pnile noastre acte ; or, cel mai evident dintre aceste acte este atribuireî de nume proprii. Fără îndoială, încă înainte de Frege, mulţi filosof au încercat să explice faptul că numele au semnificaţie, spunînd că ele reprezintă lucruri, aşa precum numele „Socrate” reprezintă pe Socrate. Dar această idee nu este prea fericită, deoarece numele proprii nu sînt nicidecum esenţiale pentru comunicare.

în loc de „Socrate a murit pentru că a băut cucută”, am putea spune „Filosoful cîrn care a căutat pentru prima oară definiţiile virtuţilor a murit pentru că a băut cucută”. E adevărat că sensul celei de-a doua observaţii nu este exact acelaşi ca sensul primei, deoarece înţelegerea ei reclamă cunoştinţe care nu sînt necesare pentru înţelegerea primei observaţii; dar în multe contexte, a doua ar putea îndeplini misiunea primei, şi se pare că nu ne putem imagina un context (în afară de cel al compilării unui dicţionar de denumiri) în care scopurile slujite prin primul enunţ să nu poată fi servite la fel de bine prin enunţarea unei anumite parafraze în care să nu figureze vreun nume propriu. Şi nu numai atît. în contextele familiare, am putea să eliminăm chiar şi descripţiile definite, precum şi cuvinte ca „eu”, „tu”, „acesta”, „acela”, „aici” şi „acum”, pe care Frege le tratează întotdeauna ca pe nişte cvasidenumiri. Pentru aceasta, nu ne-ar trebui decît un cod de felul celora la care recurg serviciile poştale pentru a transmite telegrame de felicitări. Fiecărei propoziţii din engleză care se repetă în mod frecvent i-ar corespunde o singură expresie lipsită de părţi semnificative şi, prin uz constant, aceasta din urmă ar căpăta forţa de care în prezent se bucură prima. în comunicarea obişnuită putem întîlni de fapt exemple de acest gen. Cînd un jucător de golf strigă „Fore!”, cei din faţa sa receptează strigătul lui ca un avertisment că el este pe punctul de a trimite mingea în direcţia lor. Tot astfel, atunci cînd telegrafistul unui vapor emite semnalul internaţional

S.O.S., cei care îl receptează înţeleg (fără a avea nevoie de o traducere) că în locul de unde provine semnalul se cere un ajutor de urgenţă. Fără îndoială, este imposibil să efectuăm în acest fel toate comunicările noastre, dar important este să înţelegem că imposibilitatea propunerii se datorează mai curînd modului în care învăţăm limbile decît modului în care folosim aceste limbi după ce le-am învăţat.

în cursul unei zile, fiecare dintre noi are prilejul să rostească numeroase propoziţii care nu au fost încă auzite în istoria omenirii. Astfel, chiar şi un copil de zece ani ar putea spune : „Am văzut o păpuşă care se plimbă şi un aparat electric de tuns iarba în prăvălia de lingă biserica în care bunicului i-a căzut din mînă cutia milei, după ce arhiepiscopul şi-a ţinut predica” ; or, dacă a spus aceasta nu trebuie să credem că a făcut o mare ispravă. Dar este cel puţin improbabil ca toate cuvintele din exemplul nostru să fi fost vreodată aşezate exact în această ordine înainte ca noi să fi construit acest exemplu. Or, este clar că o limbă care ar permite numai expresii unitare nu ar fi adecvată nevoilor noastre, deoarece nu ne-ar oferi nici un mijloc pentru a face faţă unor situaţii rare. Fiecare expresie învăţată de noi ar fi adecvată numai pentru situaţii de un anumit gen; şi deşi am putea extinde cu succes, prin analogie şi metaforă, accepţiile unor asemenea expresii, nu am fi niciodată în stare să dobîndim un bagaj destul de cuprinzător pentru toate obiectivele vorbirii uzuale. într-un limbaj foarte evoluat trebuie, aşadar, să dispunem nu numai de un vocabular, dar şi de o sintaxă, deşi avem motive să credem că la început de tot este posibil ca oamenii să nu fi avut decît vocabular. Dar, indiferent dacă vorbim în expresii standard simple sau în propoziţii compuse, ceea ce spunem este întotdeauna ceva ce, în principiu, ar putea fi utilizat în alte împrejurări de acelaşi gen, dacă ar exista asemenea împrejurări. Căci, deşi improbabil, nu este desigur imposibil ca în diferite momente de timp şi în diferite locuri zeci de copii să rostească propoziţia complicată pe care am construit-o cu titlu de exemplu, şi anume toţi cu aceeaşi corectitudine lingvistică. Situaţia nu se schimbă prea mult nici dacă presupunem că limba cu care avem de-a face conţine nume proprii. Se poate întîmpla ca pe viitor nimeni, cu excepţia unui actor sau a unui gramatician, să nu mai spună „Acum Socrate bea cucută”, dar ne putem imagina totuşi că această propoziţie ar putea fi utilizată în vederea unui enunţ sincer şi chiar

adevărat. La un moment oarecare, un alt Socrate (care în acest context înseamnă : alt om, avînd numele de Socrate) poate să bea cucută.

O expresie unitară seamănă cu un model de mimică sau un tip de gesticulaţie. A spune „Da" şi a da din cap nu sînt decît două moduri de încuviinţare; iar a spune „Bun!" cu o anumită intonaţie este o modalitate emfatică pentru a exprima ceea ce alteori exprimăm ridicînd din sprîncene. Dar o propoziţie compusă, cu subiect şi predicat distincte, poate fi privită în acelaşi mod. în adevăr, a spune „Sînt obosit" este o mostră de comportare ce poate servi ţelurile noastre în acelaşi mod în care le servesc uneori arătarea cu degetul sau închiderea ochilor şi aplecarea capului. Putem deci susţine că, în toate aceste cazuri, semnele noastre au atît sens cît şi referinţă ? Fără îndoială, trebuie să distingem sensul general al unui semn consij derat ca o schemă de comportament (adică: ceea ce învăţăm atunci cînd învăţăm regulile întrebuinţării semnului) de diversele comunicăr: pe care le putem efectua prin intermediul său în diferite împrejurări or, putem afirma în mod corect că comunicările diferă între el< deoarece se referă la împrejurări diferite, în funcţie de ceea ce a prilejui rostirea respectivă. Dar această distincţie nu coincide cu cea făcut: de Frege. într-adevăr, sensul general despre care vorbim aici ni este, aşa precum este *Sinn* la Frege, o propoziţie determinată, ş nici referinţa despre care vorbim nu este denumire sau desemnare. Utilizarea unor cuvinte sau expresii avînd o funcţie de desemnare nu este exclusă, de exemplu atunci cînd spunem „Socrate a murit pentru că a băut cucută" sau „Dimineaţa aceasta a sunat lăptarul" ; dar aceasta nu este esenţial, căci referinţa de felul acelei pe care o avem acum în vedere se poate realiza prin utilizarea unor semne lipsite de părţi semnificative, şi ne putem cel puţin imagina că toate semnele ar fi de acest fel. Dacă ar fi să utilizăm terminologia lui Frege, putem spune doar că o anumită enunţare a unei propoziţii exprimă un sens; dar pentru o înţelegere adecvată a acestui lucru trebuie să continuăm analiza.

Calitatea care a favorizat supravieţuirea şi dezvoltarea sintaxei a fost economicitatea. Or, prima şi cea mai evidentă măsură a economicităţii pe care o putem adopta în construirea propoziţiilor constă în utilizarea unuia şi aceluiaşi vocabular pentru a exprima atît enunţurile cît şi întrebările, ordinele şi celelalte. într-un limbaj în care nici o expresie nu ar avea vreo parte înzestrată cu semnificaţie

proprie nu ar putea exista vreo asemănare relevantă între o întrebare şi răspunsul corespunzător sau între o cerere şi promisiunea de a o satisface. Dar, după cîte ştim, toate limbile umane pe care le cunoaştem cît de cît cuprind procedee cu ajutorul cărora propoziţiile cu aceleaşi cuvinte sau rădăcini de cuvinte pot fi totuşi deosebite ca fiind indicative, interogative, imperative sau optative. în limbile europene, diferenţele sînt adesea indicate prin modificările acelui tip special de cuvinte care se numeşte verb, dar chiar în interiorul acestei grupe lingvistice există şi alte posibilităţi. Astfel, întrebările' sînt îndeobşte exprimate printr-o adaptare a formei indicative, dar această adaptare poate consta fie în adăugarea unei particule *(Num venit?),* fie în inversarea ordinii cuvintelor („Vine el?"), fie pur şi simplu printr-o intonaţie specială („El vine?").

Uneori, din motive de ordin stilistic sau retoric, schema normal adecvată unui gen de comunicări este folosită în vederea unei comunicări de gen diferit; de exemplu, atunci cînd un ordin militar este exprimat printr-o propoziţie indicativă la viitor, sau cînd un enunţ retoric face apel la o construcţie interogativă. Dar în fiece caz avem o anumită convenţie sau regulă implicită care determină ca o schemă să fie adecvată contextului şi ţelurilor vorbitorului. Oricare ar fi procedeul expresiv, se poate afirma în mod cert că o propoziţie compusă posedă întotdeauna o anumită trăsătură care . are funcţia specială de a manifesta atitudinea vorbitorului sau ceea ce îl interesează anume, într-adevăr, comunicarea este în esenţă manifestarea deliberată a anei atitudini faţă de o judecată sau o stare de lucruri ce poate fi concepută. Emiterea unui enunţ este o manifestare a opiniei vorbitorului, punerea unei întrebări este manifestarea curiozităţii vorbitorului sau a dorinţei sale ca cel care-l ascultă să-i dea o anumită informaţie, şi aşa mai departe. Numai tipurile cele mai uzuale de comunicări au primit denumiri speciale; dar, dacă am vrea, am putea distinge în cadrul comunicărilor cuprinse în clasa exclamaţiilor mult mai multe varietăţi. Să considerăm, de exemplu, deosebirile dintre „Slavă Domnului, s-a terminat!", „La naiba cu Papa !" şi „Smith — episcop ! Dumnezeule!''. Dacă am lua în consideraţie întrebuinţările limbajului în alte scopuri decît comunicarea (de exemplu, pentru ritual), ar trebui să trasăm alte distincţii, dar aici putem ignora fără nici o grijă aceste complicaţii. I

Pentru logician, toate acestea prezintă interes în primul rînd în legătură cu distincţia implicată aici dintre manifestarea unei atitudini şi propunerea unei judecăţi faţă de care este manifestată respectiva atitudine. în cadrul unora dintre expresiile noastre unitare, cum sînt „Da", „Bine !" şi „Drace!", nimic nu indică judecata faţă de care vorbitorul îşi manifestă atitudinea, deoarece rostirea unei atare expresii într-un caz dat este de obicei suficientă pentru a arăta direcţia în care este îndreptat interesul vorbitorului. Evident, cazul opus al unei expresii unitare care nu manifestă vreo atitudine nu poate avea loc, deoarece fără manifestarea unei atitudini nu am avea nici un fel de comunicare. Dar se poate concepe că dezvoltarea sintaxei a produs semne pur propoziţionale (judicaţionale) care, în combinaţie cu semne de atitudine, în genul liniei lui Frege pentru judecată, ar constitui propoziţii complete. De exemplu, am fi putut exprima enunţuri de formă „P da" şi întrebări de forma „P se întreabă" unde „P" ca atare nu este nici declarativ, nici interogativ, ci pur şi simplu un semn de propunere a unei judecăţi. în fapt, lucrul acesta nu s-a petrecut în nici una din limbile naturale pe care le cunoaştem; oricine vrea să discute un semn judicaţional într-o asemenea limbă trebuie să citeze o expresie care constituie o propoziţie completă, deoarece conţine mijloace pentru manifestarea unei atitudini. De obicei, logicieni: au luat pentru exemplele lor propoziţii indicative, fără să se gîndească la vreo alternativă. Poate că au procedat astfel deoarece în minteE lor au confundat întrucîtva logica şi epistemologia, dar oricum exists motive serioase pentru această alegere.

în primul rînd, propoziţiile indicative tind spre o mai mare sim plitate de construcţie în comparaţie cu celelalte propoziţii, exceptînc propoziţiile imperative. în al doilea rînd, judecăţile propuse d< enunţuri pot fi de toate felurile, în timp ce comenzile sau cererii» au totdeauna de-a face cu o eventuală acţiune în viitor a ascultătoru lui. în al treilea rînd, în vorbirea obişnuită, enunţurile, spre deosebiri de alte comunicări (poate cu excepţia întrebărilor), sînt consideraţi adesea făcîndu-se abstracţie de atitudinea unui vorbitor sau a altuia. După toate probabilităţile, motivul constă în aceea că în situaţiile complicate intervine elementul opiniei şi multe enunţuri similare s-ar putea concepe ca fiind emise de numeroşi oameni în diverse contexte. Aceasta se întîmplă deosebit de frecvent în discuţiile ştiinţifice. Dar, indiferent

de explicaţie, dacă cineva ne întreabă despre semnificaţia unui enunţ considerat în acest fel, ne mulţumim să-i răspundem printr-o expresie de forma „că aşa şi pe dincolo", deşi, dacă am încerca să dăm semnificaţia unui enunţ de orice alt gen, am considera necesar să menţionăm atitudinea vorbitorului. Ar fi poate cam exagerat să spunem că orice enunţ semnifică o judecată dar, fără îndoială, putem afirma, alături de Frege, că de multe ori enunţurile sînt concepute ca exprimări ale gîndurilor în sensul în care unele şi aceleaşi gînduri pot fi împărtăşite, cu sau fără convingere, de mai mulţi oameni, în al patrulea rînd — iar aceasta este lucrul cel mai important — propoziţiile indicative, sau mai bine zis acele forme de cuvinte care în anumite contexte se vor numi propoziţii indicative, pot fi utilizate în anumite situaţii fără putere asertivă. Cînd spunem „Vom avea o recoltă slabă dacă vremea asta continuă", nu ne obligăm să credem că vom avea o recoltă slabă; aşadar, în acest context expresia de la început acţionează ca un semn pur judicaţional. Fără îndoială, [ea este numai o parte a semnului pentru judecata asertată, dar întreaga propoziţie nu şi-ar îndeplini oficiul de a propune această judecată Iacă această parte nu ar putea fi recunoscută ca semn judicaţional :u drepturi depline. Toate aceste constatări sînt implicite în formularea mor scheme de inferenţă pe care le întîlnim la stoici, cum ar fi: ‚Dacă primul, atunci al doilea; dar primul; deci al doilea".

Deoarece este greu, dacă nu chiar imposibil, să discutăm aceste >robleme fără a folosi o terminologie specială, să convenim a spune ă propoziţiile şi clauzele de felul celor asupra cărora am atras atenţia eva mai sus sînt expresii judicaţionale şi că ele exprimă, propun au semnifică judecăţi. Trebuie însă să adăugăm că pe cînd unele xpresii ca „2 + 2 = 4" şi „virtutea este propria ei răsplată" exprimă na şi aceeaşi judecată, indiferent de prilejul rostirii, majoritatea spresiilor utilizate în conversaţie exprimă judecăţi diferite în ocazii iferite, în funcţie de împrejurările rostirii. Or, este evident că dacă >ate expresiile noastre pentru judecăţi ar fi semne unitare, nu ar |:ista nici un fel de desemnări; este însă interesant să remarcăm . desemnările pot lipsi şi în expresiile care posedă un anumit gen de ructură internă. Cînd un liftier strigă „Merge sus!", primul cuvînt expresiei pronunţate dă ideea de mişcare cu liftul său în viitorul >ropiat, iar al doilea o completează indicînd direcţia, dar nici unul n aceste cuvinte nu desemnează ceva; este de prisos să mai spunem că expresia rostită nu-i decît o

prescurtare pentru „Liftul meu merge sus”, deoarece liftierul omite primele două cuvinte tocmai pentru că în contextul dat ele sînt de prisos. Atunci, de ce să mai introducem desemnări în cursul dezvoltării sintactice a limbajului? Se pare că răspunsul trebuie căutat iarăşi în considerente de economicitate. Fără îndoială, s-ar putea să existe o modalitate ca liftierul să-i poată spune unui obişnuit de-al locului, fără să recurgă la desemnări, că liftul următor, care coboară, se află în partea opusă a coridorului; dar dacă toate expresiile noastre pentru judecăţi ar fi asemănătoare cu exclamaţiile lucrătorilor, am avea nevoie de un număr foarte mare de expresii, iar unele dintre ele ar fi întrebuinţate extrem de rar. Construirea propoziţiilor cu ajutorul desemnărilor şi semnelor funcţionale, după cum este uzul, prezintă un avantaj evident, deoarece utilizarea acestor elemente ne permite să facem faţă relativ uşor unei diversităţi aproape nelimitate de situaţii.

Spunînd aceasta, nu vrem să susţinem că schema subiect-predicat, pe care o întîlnim în toate limbile foarte evoluate, este un procedeu pur arbitrar. Dimpotrivă, pare evident că utilitatea procedeului depinde de faptul că multe judecăţi, deşi nu chiar toate, faţă de care manifestăm atitudini, sînt atributive sau relaţionale. Este totdeauna riscant să construim un argument metafizic pe baza unei scheme de construcţie utilizată într-o expresie judicaţională, dar dacă cinev: susţine cu toată seriozitatea că întreaga sintaxă este o construcţie liberă a minţii omeneşti, atunci el este dator să explice ce anume înţelege prin libertate în această ordine de idei şi, în special, să arate prin exemple cum ar putea fi realizat acelaşi lucru într-un moe cu totul diferit. Ceea ce vrem să subliniem aici este cu totul altceva şi anume că desemnarea nu trebuie luată ca o paradigmă a tuturo utilizărilor de semne, întrucît, atunci cînd se produce, ea trebui explicată ca ceva accidental în efectuarea comunicării. A spune c „Socrate” îl desemnează pe Socrate nu înseamnă a spune altcev decît că expresiile pentru judecăţi care conţin acest nume sînt adecvat pentru propunerea de judecăţi cu privire la Socrate, faţă de cai am dori eventual să manifestăm diverse atitudini. Faptul că putei spune că numirile şi cvasidenumirile posedă atît sens cît şi referini reprezintă o particularitate a acestor semne, de care va trebui **i** ne ocupăm în secţiunea următoare. în teoria semnificaţiei, noţiuni fundamentală nu este desemnarea, ci,

mai curînd, ceea ce Frege numi expresia sensului.

Odată clarificat acest punct, putem face uz de unele rezultate ai lui Frege în vederea formulării unei teorii satisfăcătoare a adevăruli Analizînd vorbirea indirectă, Frege spune că o clauză substantivai ca „faptul că orbitele planetelor sînt circulare” are ca referinţă sen» >ropoziţiei corespunzătoare ei: „Orbitele planetelor sînt circulare”, 'u alte cuvinte, printr-o elaborare adecvată a limbajului, judecăţile >ot fi nu numai exprimate, ci şi desemnate. Fireşte, desemnarea unei udecăţi nu poate fi expresie judicaţională în accepţia noastră tehnică ; Iar nici nu este măcar necesar ca desemnarea să fie alcătuită prin idăugarea prefixului „faptul că” la o expresie judicaţională, sau)rin introducerea construcţiei cu acuzativul şi infinitivul ca în limba aţină. Căci, deşi desemnările astfel constituite prin adaptarea expresii- or judicaţionale au o anumită prioritate, expresii cum sînt „teorema ui Pitagora”, „doctrina păcatului originar” şi „ceea ce a spus Gladstone n 1883” sau chiar cuvinte izolate ca „materialism” pot servi ţeluri isemănătoare. Diversitatea semnelor ce pot fi folosite în acest scop]ste de fapt nelimitată, iar pentru a ne convinge de însemnătatea capacităţii de a desemna judecăţi nu avem decît să ne gîndim cît le serios ar fi sărăcit limbajul nostru dacă i-ar lipsi asemenea semne, n deosebi cu greu s-ar putea întreprinde un studiu al logicii în absenţa mor asemenea semne, întrucît cuvintele caracteristice ale logicianului, um ar fi „atrage după sine”, „inconsistent”, „necesar” şi „posibil”, înt utilizate în primul rînd pentru alcătuirea unor propoziţii în care ermenul subiect desemnează o judecată. Din acelaşi motiv, cuvîntul adevărat” ar înceta să aibă accepţia care îi interesează pe filosofi, într-un pasaj pe care l-am citat înainte, Frege spune că „Gîndul ă 5 este un număr prim este adevărat” este echivalent cu „5 este n număr prim”, dar nu reuşeşte să vadă că principiul acestei echi-alenţe este un răspuns satisfăcător la problema filosofică a adevărulu[2]. vem nevoie de adjectivul „adevărat” deoarece avem desemnări e judecăţi, şi avem nevoie de o modalitate de utilizare a lor pentru spune ceea ce altfel ar putea fi spus numai prin intermediul unor cpresii pentru aceleaşi judecăţi. Dacă considerăm cuvîntul englez that” („că”) drept un prefix care transformă expresia unei judecăţi tr-o desemnare (ceea ce în limba română se realizează bunăoară cînd uz de „faptul că”), am putea spune eventual că adăugarea tpresiei „este

adevărat" reprezintă operaţia inversă, căci atunci nd apar împreună ambele expresii nu avem nimic în plus faţă de ea ce Frege numea conţinutul rostirii respective; sîntem înclinaţi spunem că semnul compus „este adevărat faptul că" slujeşte exact eluiaşi ţel retoric pe care îl serveşte şi particula „într-adevăr", ică numai pentru indicarea unei concesii sau marcarea sfîrşitului iei dispute. Nu trebuie uitat însă că cuvîntul „adevărat" se aplică ■ multe ori la judecăţi care nu sînt desemnate prin clauze ce încep „faptul că", iar uneori se aplică chiar şi la judecăţi pe care acum i le-am putea desemna în acest fel. De exemplu, s-a spus: „Orice putea cîndva să declare *ex cathedra* un papă în materie de credinţă sau morală este adevărat". Este evident că aici cuvîntul „adevărat' nu poate fi eliminat din context prin simplul procedeu al formulări expresiilor pentru toate declaraţiile papale ce pot fi făcute vreodată Şi totuşi, cuvîntul poate fi eliminat prin folosirea adecvată a uno variabile de judecăţi, ca de exemplu în parafraza : „Dacă un papi care vorbeşte *ex cathedra* despre credinţă sau morală declară că *p* atunci/»". Iar acest lucru o dată realizat, devine limpede că şi aici rolu cuvîntului „adevărat" este asigurarea unei conexiuni între desemnării» judecăţilor şi exprimările judecăţilor. La fel cum litera *,,p"* dit antecedentul noii noastre propoziţii marchează un loc gol care poat fi completat de expresia unei judecăţi, tot astfel „că *p"* din consecven este un semn care s-a transformat în desemnarea unei judecăţi î cazul substituirii pentru litera *,,p"* a unei expresii judicaţionalc Formulînd parafraza, am recurs în mod deliberat la o variabilă liber şi nu la una legată pentru semnificarea universalităţii, deoarece dac am fi început parafraza cu cuantorul „pentru orice *p",* gramatic cuvîntului „orice" ar fi sugerat că locurile goale marcate de liter *,,p"* ar fi adecvate numai pentru desemnări; or, nu aceasta urmării noi aici.

După Frege, orice semn complet exprimă un sens şi desemneaa ceva numit de noi referinţa acelui semn. Dar am găsit motive **a** credem că exprimarea şi desemnarea sînt misiuni îndeplinite de semil de tipuri diferite, iar această distincţie pare să aibă importanţă nl numai pentru teoria adevărului, dar şi pentru soluţionarea dificultăţii» descoperite de Frege în legătură cu funcţiile. După cum „Papa esll un om" se poate caracteriza ca exprimînd o judecată, tot astfel semnJ atributiv „.. . este un om" se poate

caracteriza Ca exprimînd o funcţw judicaţională. Şi deşi despre nici unul din acestea două nu putel spune propriu-zis că desemnează ceva, putem, dacă ne convine, A construim semne care să desemneze ceea ce exprimă semnele de **ml** sus. De pildă, „umanitate” şi „a fi om” sînt desemnări uzuale **al** atributului sau, în terminologia lui Frege, ale conceptului pe cal îl afirmăm despre papă atunci cînd spunem că el este un om. Dil cultăţile lui Frege se datorează faptului că el ignoră necesitatea uni semne noi şi încearcă să utilizeze pentru desemnare expresii ca „e! om”, în pofida faptului că acest rol nu le convine. Negreşit, el I scrie adesea ceva atît de vădit nesatisfăcător cum ar fi „concepi! este un om” ; dar în explicaţiile pe care le dă cu privire la scrie! sa, el scrie de multe ori „conceptul <5 (£)”, iar în discuţiile de orc! general foloseşte expresii atît de nelalocul lor cum sînt „concep! *om”* sau „conceptul «om»". De aceea, nu este surprinzător că une! Frege nu se simte în largul său şi înclină să se plîngă că limba e! esenţialmente inadecvată. El presupune în mod eronat că desemna^B unei funcţii trebuie să fie incompletă sau nesaturată, ca şi expresia acesteia, şi totuşi el vede limpede că un semn care este adecvat pentru utilizare în calitate de predicat nu poate servi în mod adecvat ca subiect gramatical atunci cînd vrem să vorbim despre funcţia pe :are o exprimă.

I în vorbirea obişnuită, cuvinte ca „umanitate” funcţionează satis- ăcător în calitate de desemnări ale funcţiilor judicaţionale, sau ale atributelor, deoarece ne-am familiarizat cu ele şi ne pricepem să Ivităm primejdiile de confundare a lor cu expresiile corespunzătoare, kt unei cînd, aşa cum se întîmplă uneori, logicienii susţin că ar trebui lă considerăm „umanitate” ca o abreviere a „umanităţii lui «5»”, li comit o greşeală. în timp ce, deşi nerecomandabil din punct de redere stilistic, este totuşi permis să spunem „Umanitatea este Ixemplificată în papă”, este de-a dreptul absurd să spunem „Umanitatea lui «5» este exemplificată în persoana papei”. într-o scriere la cea a lui Frege, ar fi raţional să aflăm reguli mai explicite decît lele pentru limbajul obişnuit, iar dacă vrem să includem desemnări [le funcţiilor judicaţionale ar trebui să ne străduim să indicăm limpede lelaţia dintre desemnările şi expresiile acestor funcţii. Aceasta se loate realiza prin adoptarea unui procedeu utilizat de Frege atunci Knd vorbeşte despre domenii (parcursuri de valori). După cum el trie â (a *este un*

om) pentru „clasa oamenilor”, tot astfel putem scrie l(a *este un om)* pentru „umanitate” sau „însuşirea de a fi om”. Aici fete evident că noul semn derivă dintr-o expresie funcţională cu un Ic gol, dar nu avem nici un pericol de confuzie, deoarece litera din Iteriorul parantezelor este legată de litera din exterior, iar întregul Imn compus constituie în mod evident o desemnare. Inversînd semnul ᴇ apartenenţă al lui Frege în scopul exprimării faptului de a avea [exemplificare (adică în vederea exprimării a ceea ce Frege numeşte Idere sub un concept), putem scrie în noua noastră notaţie Â u â l(a) ca un echivalent pentru $ (A). Nu propunem aceste inovaţii

■ titlul de simbolism optim pentru tratarea problemei, ci numai Intru a arăta că dificultăţile lui Frege se pot depăşi foarte uşor cu Bijloace asemănătoare celor pe care le avea la dispoziţie, cu singura Bndiţie de a recunoaşte limpede că exprimarea şi desemnarea sînt «tinete. Întrucît Aui ^(a) este exprimarea judicaţională a unei Bnstrucţii destul de complicate, este firesc ca ea să includă o expresie Bncţională, şi anume ... U —, dar aceasta nu trebuie să ne îngrijoreze.

■ adevăr, nici o porţiune a reformei noastre nu prevede ca expresiile ■ntru judecăţi să se construiască numai cu ajutorul desemnărilor, «fel îneît argumentul principal al lui Frege pentru a dovedi imposibi- ■atea de a vorbi direct despre funcţii nu ne afectează.

Există însă un considerent cu totul diferit, care trebuie să ne facă atenţi în ce priveşte referirea la funcţii. Cînd Frege a introdus acesl termen, el înţelegea prin funcţie logică o funcţie la care toate valorik erau valori de adevăr. El presupunea că în logica primară funcţiilt sînt de la valori de adevăr, la valori de adevăr, iar în logica generală de nivelul unu de la obiecte oarecare la valori de adevăr. în literatura logică de mai tîrziu, numeroşi autori care nu acceptă teoria lui FregJ asupra valorilor de adevăr, şi care poate nici nu au examinat-o vreodată în mod serios, au numit funcţii de adevăr funcţiile de primul gen şi au numit funcţii propoziţionale toate celelalte funcţii. Dacă însă ajungen la concluzia că Frege greşea atunci cînd caracteriza propoziţia indi cativă ca nume al unei valori de adevăr, negăm de fapt analogii care l-a făcut pe Frege să adopte această terminologie funcţionala Unii succesori ai lui Frege au încercat să conceapă funcţiile din logici drept funcţii avînd ca argumente lucruri (în sensul cel mai larg ci putinţă, adică într-un sens mai larg decît al „obiectului" la Fregel şi luînd ca valori judecăţi, iar alţii fac uz de expresia „funcţie propq ziţională" ca şi cum ea n-ar fi decît un mod convenabil de referire 11 un fragment de propoziţie, ca de pildă „.. . este înţelept" sau „. **.I** îl iubeşte pe ". Nici una dintre aceste două explicaţii nu l-ar **I**
satisfăcut pe Frege şi nici una nu este suficientă pentru a justifici menţinerea terminologiei sale. într-adevăr, o funcţie în sensul mat! matic propriu-zis este o schemă de punere în corespondenţă şi nu I expresie, aşa cum sugerează a doua dintre aceste explicaţii; aplicară semnului unei atare funcţii (de exemplu „V-") la o desemnare (efl exemplu pentru „2") este presupusă a produce o altă desemna® (de exemplu „^2") şi nu o expresie, cum susţine prima explicaţii

De aceea, ar fi mai indicat poate să abandonăm cu totul termini logia lui Frege şi să adoptăm în locul ei un alt mod de a vorbi, cai să nu mai sugereze analogii inadecvate. Am putea, de exemplu, i vorbim de dependenţe de adevăr în loc de funcţii de adevăr şi de **ati** bute şi relaţii în loc de funcţii propoziţionale de diferite speţe. Dai ne-am angaja într-o prezentare a logicii făcînd abstracţie de istor® ei, desigur că am proceda astfel. Dar în celelalte părţi ale lucrării A faţă am avut prilejul să observăm că numeroşi logicieni au utilizB cuvîntul „funcţie" fără a accepta teoria lui Frege asupra valorilor fl adevăr, astfel încît este convenabil să folosim în expunere practii lor, limitîndu-ne la precizarea că

oriunde intervine acest cuvînt I textul nostru el trebuie înţeles ca fiind echivalent cu un substitB sau altul din cele propuse mai sus. H

în anumite privinţe, prezentarea adevărului schiţată mai sus **e.®** similară celei date de Tarski în articolul său intitulat „Concep®

de adevăr în limbajele formalizate”**********. Şi, fără îndoială, explicaţia noastră se revendică, la fel ca şi explicaţia sa, de la autoritatea celebrei definiţii aristotelice conform căreia: spune adevărul acel ce spune despre ceea ce este că este şi despre ceea ce nu este că nu este††††††††††††††††††††††††††††††††. Dar între concepţia noastră şi cea a lui Tarski există o deosebire foarte importantă. în ce ne priveşte susţinem că adjectivul „adevărat” este aplicabil în mod primordial la judecăţi, în timp ce Tarski presupune că este aplicabil în mod primordial la propoziţii. Propoziţia „Zăpada este albă” e adevărată, ne spune el, dacă şi numai dacă zăpada este albă. Aici, semnul cuprins între semnele citării trebuie înţeles ca un nume sau o desemnare, şi întreaga remarcă urmăreşte să arate cum condiţia necesară şi suficientă pentru adevărul propoziţiei astfel menţionate poate fi dată printr-o folosire a însăşi acestei propoziţii (sau, mai bine zis, a acestei forme verbale). Pe scurt, deosebirea principală dintre această teorie a adevărului şi teoria noastră este aceea că Tarski vorbeşte despre propoziţii acolo unde noi vrem să vorbim despre judecăţi. Dar, aşa cum subliniază însuşi Tarski, dificultăţile apar cînd se încearcă să se transforme modelul său de explicaţie într-o definiţie generală, utilizîndu-se o variabilă, adică scriind:

pentru orice p, ,,p” este o propoziţie adevărată dacă şi numai dacii p. într-adevăr, dacă nu facem o convenţie specială soldată cu efectul contrar (şi, spune Tarski, este foarte greu, dacă nu chiar imposibil, să facem această convenţie de o manieră satisfăcătoare), atunci semnul cuprins între semnele citării nu. este, aşa cum se intenţiona, un fel de semn funcţional care se poate transforma în numele unei propoziţii printr-o substituţie adecvată pentru litera dinăuntrul semnelor citării, ci este numai o desemnare a acelei litere. El merge chiar pînă acolo încît susţine că posibilitatea construirii paradoxului mincinosului în cadrul limbajului obişnuit ar dovedi că pentru acesta, spre deosebire de limbajul formalizat al ştiinţei, nu poate exista o

---

********** Publicat pentru prima dată în *Travaux de la societe des sciences et des lettvcs de Tarsovie,* clasa III, Math-Phys. XXXIV (1933), traducere germană în *Studia Philoso- >hica,* I (1936) pp. 261 — 405; traducere engleză în *Logic, Semantics, Melamathematics,* >p. 152- 278.

††††††††††††††††††††††††††††††††††††[8] *Metaphysica,* F, 7 (1011 b 25).

definiţie satisfăcătoare a adevărului. Această concluzie este atît de stranie, încît trebuie să ne pună în gardă împotriva presupunerilor din care derivă; iar sursa dificultăţii pare să fie convingerea lui Tarski, acceptată necritic, că adevărul este în mod primordial o proprietate a propoziţiilor.

Cînd avem de-a face cu formule matematice (care îl interesează în mod special pe Tarski) sau alte expresii care seamănă cu exemplul său prin aceea că nu conţin cuvinte reflexive (adică cuvinte care determină lucruri sau evenimente prin relaţie cu circumstanţele propriei lor rostiri), presupunerea lui Tarski nu duce la nici o dificultate serioasă. într-adevăr, putem vorbi, desigur, despre adevărul unei formule matematice tot aşa cum nu pare absurd să vorbim despre adevărul propoziţiei generale „Zăpada este albă". în toate aceste cazuri avem de-a face cu un tip de semn compus care propune o aceeaşi judecată în fiecare împrejurare în care este folosit, şi tocmai de aceea putem discuta adevărul semnului aproape la fel cum discutăm adevărul judecăţii exprimate de acest semn. Dar acestea sînt cazuri speciale. O propoziţie dintre cele mai obişnuite poate fi enunţată, la momente diferite şi în împrejurări diferite, pentru a exprima diferite judecăţi, unele adevărate şi unele false. Judecata asertată de Jones prin afirmaţia ,,Mi-e foame" nu este aceeaşi cu judecata asertată de Smith prin pronunţarea acestor cuvinte în acelaşi timp şi nici aceeaşi cu cea isertată ieri de Jones prin rostirea acestor cuvinte. Iar cînd spunem — cum obişnuim să facem uneori — că o propoziţie era adevărată în momentul rostirii sau scrierii ei, vrem să spunem prin aceasta, evident, că ea a fost folosită atunci pentru exprimarea unei judecăţi adevărate, deşi în momentul de faţă ea nu ar putea fi folosită în acelaşi scop. Atunci cînd nu urmărea nemijlocit expunerea propriei sale teorii a adevărului, Frege era pe deplin conştient de această trăsătură a limbii. Ridicîndu-se împotriva psihologismului în logică, el scrie că am putea eventual să caracterizăm propoziţia „Mi-e foame" ca fiind adevărată pentru unii oameni şi falsă pentru alţii, sau ca adevărată în anumite circumstanţe şi ca falsă în altele, dar aceasta numai pentru că este utilizată în scopul exprimării unor judecăţi diferite în ocazii diferite, „Toate determinările de spaţiu, de timp etc. revin — spune el — gîn- dului (Gedanke) al cărui adevăr este considerat: a fi adevărat este în sine însuşi ceva aspaţial şi

atemporal”‡‡‡

reprezintă un paradox (în alt sens al cuvîntului), un para- x gratuit. Limbajul obişnuit nu este un sistem închis, ci este tot :a ce facem în cadrul lui, vorbind ; iar dacă considerentele semantice ită necesitatea unei distincţii între nivele de limbaj, distincţia va făcută înăuntrul limbajului obişnuit. Deşi, într-un anumit sens, ibi naturale ca engleza şi franceza constituie alternative una pentru daltă şi pentru un simbolism tehnic, limbajul obişnuit, de felul celui icutat de Tarski, nu constituie o alternativă la un limbaj extraordinar, re a fost sau care poate fi inventat de logicieni în vederea tuturor jpurilor legitime la care serveşte în prezent limbajul obişnuit. Dim- trivă, acesta din urmă este matricea în cadrul căreia sînt elaborate ite celelalte sisteme de comunicare şi, de aceea, el nu poatî fi criticat un produs nereuşit al unui rival profesional.

Grija multor logicieni de a sublinia că adevărul priveşte propoziţiile nu judecăţile se datorează unei fobii a entităţilor abstracte, fobie re, la rîndul ei, pare să provină din două surse. Prima, care a putut observată la filosofi încă de cînd Platon a stîrnit proteste vorbind despre o lume suprasensibilă, este obsesia economiei de gîndire. A doua, care ţine de istoria mai recentă, este reacţia violentă împotriva tuturor tentativelor de a vorbi despre structura lumii. Această fobie odată diagnosticată, pacientul trebuie încurajat şi chiar împins să aducă la îndeplinire programul său de eliminare sistematică, în loc de a face simple declaraţii de oracol. Odată determinat să persevereze un timp destul de mare în această direcţie, el poate ajunge astfel în situaţia de a-şi da seama că îi este imposibil să spună tot ce are de spus fără să vorbească despre calităţi, relaţii, păreri, ipoteze, concluzii şi tot restul. Cura va fi completă atunci cînd el este gata să admită că, deşi Platon şi adepţii săi au ajuns la absurditatea de a vorbi despre suprasensibil ca despre ceva ce ar putea fi observat printr-un fel de suprasimţ, acesta este un motiv mult prea slab pentru a susţine că toate încercările de desemnare a unor obiecte suprasensibile sînt într-un fel improprii. într-adevăr, dacă urmează să vorbim în genere despre felul cum folosim limba, trebuie să ne permitem a spune că o propoziţie sau o expresie predicativă exprimă ceva. Dar pentru a spune ce exprimă un asemenea semn avem nevoie nu de o altă expresie, ci de o desemnare, întrucît în cadrul oricărui

enunţ pozitiv adevărat de forma „... exprimă — ” semnele care completează cele două locuri goale trebuie să fie amîndouă nişte desemnări, primul semn pentru o expresie, iar al doilea pentru ceea ce exprimă acea expresie. Ca atare, este absurd să ne lipsim de bunăvoie de această facilitate numai pentru că uneori s-a abuzat de ea.

Este însă prea puţin probabil ca programul de limitare a preocupă-l rilor numai la propoziţii să fi fost adoptat vreodată pe scară largă de către logicieni numai pentru faptul că avem cuvinte care în unele contexte însemnează acelaşi lucru ca „propoziţie” iar în altele acelaş: lucru ca „judecată”. Atunci cînd am examinat opera lui Bolzano arr văzut că cuvîntul german *Satz* este uneori un termen gramatical echivalent cu „propoziţie” sau „clauză”, dar alteori indică o lege, o teo remă, un principiu sau o judecată, adică ceva ce se poate exprima îi diferite moduri în limbi deosebite şi se poate caracteriza ca adevăra sau fals. în engleză, cuvîntul „propoziţie” *(sentence)* este specializat ma îngust decît *Satz* şi nu este privit în mod normal ca un subiect adecva pentru adjectivele „adevărat” şi „fals”. Dar cuvîntul nostru „enunţ este aproape tot atît de labil ca *Satz,* avînd o sferă de aplicabilitat oarecum diferită. El poate însemna sau o propoziţie indicativă, sa ceea ce se afirmă despre o anumită producere a unei propoziţii indicat: ve, sau actul enunţării a ceva; iar în afară de toate aceste* accepţ el poate să figureze în expresia concrescută „a face un enunţ”, und nu poate fi parafrazat în mod separat. Acei ce găsesc că e plauzib să atribuim propoziţiilor adevăr sînt, pare-se, influenţaţi de fapti că expresia „propoziţie indicativă” este legată, aşa cum este, de expresia „enunţ”, iar prin „enunţ” cu „judecată”.

Fără îndoială, menţionarea judecăţilor dă uneori loc la confuzii, deoarece autori ca Bolzano le-au expulzat în intermundii ciudate, între limbaj şi realitate. Dar este greşit să credem că utilizarea cuvîntului „judecată” ne obligă fără drept de apel la o inovaţie inacceptabilă. în accepţia lor comună din epoca modernă, cuvintele „propoziţie” şi „judecată” slujesc la efectuarea a două clasificări diferite în cadrul evenimentelor actuale şi posibile ale vorbirii. Orice asemenea eveniment este rostirea unui enunţ, adică producerea unei exemplificări a unei anumite forme verbale care, în principiu, ar mai putea avea şi alte exemplificări.

într-adevăr, este cu neputinţă să vorbim dacă nu vorbim într-un limbaj, adică dacă nu facem uz de semne repetabile. Dar am văzut că mai multe enunţuri ale unei propoziţii-tip pot exprima judecăţi diferite, în funcţie de împrejurările apariţiei lor; este evident, totodată, că o anumită judecată poate fi exprimată prin rostiii ale unor propoziţii-tip felurite, deoarece nu există un limbaj unic în care să fim obligaţi a spune tot ce avem de spus. Cînd gramaticienii întrebuinţează cuvîntul „propoziţie" (aşa cum obişnuiesc) pentru o formulă verbală, ei vor să se refere la trăsăturile comune ale rostirilor, care seamănă între ele aproape la perfecţie ca sunet sau după alt caracter perceptibil, dar se pot deosebi între ele în mod considerabil ca vehicule de comunicare. Un exemplu este propoziţia „I have the pen of garde- ner's wife" pe care generaţii întregi de şcolari s-au străduit s-o traducă în franţuzeşte fără să-şi dea osteneala să se întrebe ce înseamnă aici „pen" şi „gardener"§§§

modul în care pot să apară în cadrul discursului referiri la judecăţi se ridică unele probleme speciale, dar pentru soluţionarea acestor probleme nu este necesar să mergem dincolo de analiza judecăţilor pe care am schiţat-o aici.

2. *Teoria descripţiilor şi varietatea desemnărilor*

Frege a introdus distincţia sa între sens şi referinţă atunci cînd considera enunţul „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară" şi am văzut că distincţia este aptă să soluţioneze chestiunea care îl preocupă în acest context. într-adevăr, deşi cele două expresii, „Luceafărul de ziuă" şi „Luceafărul de seară", sînt desemnări ale aceluiaşi obiect, ele au în mod evident sensuri diferite. Cum se poate însă împăca această distincţie cu încercarea noastră de a arăta că expresiile şi desemnările sînt semne de genuri deosebite ? Răspunsul este că aceste desemnări, ca şi multe altele, derivă din expresii, şi putem spune deci că ele au sens într-un mod derivat. Utilizînd expresia „Luceafărul de ziuă" ca subiect într-o propoziţie, noi nu exprimăm prin aceasta judecata că există un astru şi numai unul care poate fi văzut adesea cînd se face ziuă, însă întrebuinţarea pe care i-o dăm expresiei presupune acceptarea acelei judecăţi. în limbajul cotidian, o propoziţie care conţine expresia „Luceafărul de ziuă" se zice că implică existenţa unui astru, şi numai al unuia, care poate fi văzut adesea cînd se face ziuă. Accepţia lui „implică" la care ne referim aici nu este prea mult discutată în tratatele de logică, dar ea este interesantă şi destul de complicată. într-un fel, implicaţia de acest gen pare a fi mai puţin ca o expresie. într-adevăr, cînd un om care a utilizat o expresie ce implică o anumită judecată trece la formularea acelei judecăţi, noi considerăm că el a făcut ceva în plus. în altă privinţă însă, o implicaţie de acest gen este mai mult decît o simplă expresie. Intr-adevăr, cineva poate să exprime o judecată fără să manifeste sau să vrea să manifeste încredere în această judecată dar dacă întrebuinţează o expresie care implică această judecată, se înţelege că el o acceptă, chiar dacă propoziţia în care figurează respectiva expresie nu este indicativă. De exemplu, dacă cineva invită un proaspăt cunoscut al său să-i facă o vizită şi-i spune „Vă rog sî veniţi cu soţia", el nu asertează judecata că acea cunoştinţă a sa est< căsătorit, dar, fără îndoială, el lasă să se înţeleagă că are această convingere.

Desemnarea unui lucru este indicarea lui sau atragerea atenţiei asupra lui; aşadar, cînd un vorbitor întrebuinţează o descripţie definită la singular, ca şi cum ar încerca să desemneze ceva, este firesc să presupunem că el crede în existenţa unui lucru, şi numai a unuia, care corespunde descripţiei, întrucît în caz contrar procedura sa ar fi fără noimă. Cînd cineva este nesigur de adevărul judecăţii sale existenţiale, el poate să atenueze remarca sa într-un mod adecvat. Cînd, de exemplu, nu are certitudinea dacă noua sa cunoştinţă este căsătorit, el poate spune: „Dacă sînteţi căsătorit, vă rog să veniţi cu soţia". în acest context, descripţia nu pare să îndrepte 'atenţia noastră asupra unui lucru determinat care putea eventual să fi fost descris într-un alt mod. Intr-adevăr, clauza condiţională are efectul de anulare a obligaţiei ce s-ar fi exprimat, altminteri, prin utilizarea descripţiei definite. Avînd în vedere afirmaţiile a numeroşi logicieni, merită poate să observăm şi faptul că o descripţie definită poate să apară la plural, adică cu o implicaţie a existenţei *mai multor* lucruri corespunzătoare ei. Spunem, de pildă: „Primii apostoli erau cu toţii evrei".

Frege îşi dădea bine seama de faptul că în limbajul obişnuit utilizarea unei descripţii definite ca subiect al unui enunţ singular presupunea acceptarea unei judecăţi neasertate explicit, şi el vedea că dacă descripţia nu reuşea să desemneze ceva, atunci nu se poate spune că enunţul în întregul său ar fi adevărat sau fals. Dar el considera important să insiste asupra aplicării principiului terţului exclus la toate formulele bine formate din propria sa scriere şi de aceea, aşa cum am văzut, a vrut să dea un referent de un gen sau altul pentru fiecare descripţie definită din sistemul său, deşi admite că uneori referentul ar fi cu totul independent de intenţia normală a persoanei care utilizează acea descripţie. Logicienii care i-au urmat au încercat să facă faţă în alte feluri acestei dificultăţi.

în *Principia Mathematica,* Whitehead şi Russell procedează ca şi cum judecata despre care spunem de obicei că este implicată de folosirea unei descripţii ar fi enunţată explicit în propoziţia care conţine descripţia respectivă. După ei „Regele Franţei este pleşuv" este echivalent cu (3 c){(x) [K(x) = *x* = cJ-B (c)}, sau „Există un lucru, ;ă zicem *c,* astfel încît (I) un lucru este regele Franţei dacă şi numai Iacă este identic cu *c* şi (II) *c* este pleşuv", ceea ce exprimă, desigur, > judecată falsă dacă sau nu există nici un rege al Franţei, sau

există nai mulţi decît unul[5]. Dar, pentru a-şi apăra în mod consecvent :oncepţia, Whitehead şi Russell consideră necesar să distingă între ********** intrarea primară şi intrarea secundară a unei descripţii. Astfel, dacă cineva spune: „Regele Franţei nu este pleşuv", înţelegînd (3c) {(x) [K(x) = *x = c]. B (c)* descripţia are o intrare primară, în timp ce dacă el recurge la aceeaşi formă verbală în înţelesul ~ (3 c){(x) *[K(x) = x* = c].B(c) }, descripţia are intrare secundară. Vom constata că în primul caz se presupune că vorbitorul acceptă implicaţia existenţială a descripţiei sale, în timp ce în al doilea caz întreaga propoziţie poate să exprime o judecată adevărată chiar dacă nu există nici un rege al Franţei.

în propriul lor simbolism, distincţia este arătată limpede printr-un procedau oarecum asemănător cu utilizarea unui cuantor care arată domeniul de acţiune al unei generalizări. De aceea, exemplul nostru de intrare primară ar fi redat prin formula [(i x)7C(x)]{ *~B* [(i *x)* X(x)]}, iar exemplul nostru de intrare secundară prin formula ~ [(ix) *K(x)J { B* [(i††††††

propriile sale avantaje şi dezavantaje. Dintre cele trei, schema lui Frege oferă celui ce face uz de descripţii libertatea cea mai mare, şi este cea mai uşor operabilă; dar totodată ea este şi cea mai îndepărtată de folosirea obişnuită. Schema lui Whitehead şi Russell evită orice extravaganţă şi permite totuşi o libertate largă celui ce face uz de descripţii în scopul de a explicita ceva ; dar ea ajunge la acest rezultat numai cu preţul unei complicări considerabile a simbolismului Schema lui Hilbert şi Bernays este foarte uşor de operat şi totodat; foarte naturală, în sensul că corespunde îndeaproape uzajului limbilo naturale; dar ea restrînge libertatea celui ce face uz de descripţii ş face ca noţiunea de formulă bine formată să fie relativă la gradul de dezvoltare a sistemului, ceea ce poate fi privit de unii ca un defect, în ce ne priveşte, preferăm a treia sugestie, dar considerăm că ar fi o greşeală să vorbim ca şi cum în contextul logicii matematice celelalte două ar fi eronate.

Din păcate, analiza meritelor tehnice ale acestor propuneri a fost adesea confundată de filosofi cu dezbaterea altor chestiuni. Aceasta se datorează faptului că Russell şi-a prezentat propunerea sa ca o contribuţie la analiza filosofică. El susţinea înainte de toate că ceea ce afirmase cu privire la descripţiile definite în cadrul logicii sale matematice constituia totodată o analiză corectă a modului în care erau utilizate descripţiile definite în limbajul obişnuit; în al doilea rînd, el susţinea că între descripţii şi nume proprii în sens logic există o distincţie care corespunde distincţiei dintre două tipuri de cunoaştere, numite de el cunoaştere prin descriere şi cunoaştere prin sesizare. Am văzut deja că prima dintre aceste afirmaţii este falsă şi nu mai avem nimic de spus despre ea, afară de faptul că Russell a fost indus în eroare datorită dorinţei sale, cît se poate de rezonabile, de a găsi o ieşire din doctrina lui Bolzano şi Meinong, potrivit căreia expresia „regele actual al Franţei”, avînd o semnificaţie, trebuie să desemneze ceva, deşi nu neapărat ceva existent‡‡‡

întrebuinţat pentru a desemna un obiect de care vorbitorul este nemijlocit conştient în timp ce vorbeşte, adică ceva pe care el îl vede în sensul fundamental şi inanalizabil al lui „a vedea" şi care desemnează ceea ce desemnează fără a spune sau a implica nimic despre acest obiect. Numele proprii obişnuite nu satisfac aceste norme stricte. Astfel, „Homer" trebuie înţeles ca echivalent cu „autorul *Iliadei*" sau ceva în genul acesta, şi în realitate este o descripţie. Are sens să afirmăm : „Homer nu a existat", în timp ce nu are sens să afirmăm că „A există" sau „A nu există", dacă „A" este un nume propriu în sens logic. Russell admite într-adevăr că cu greu se poate găsi în vorbirea obişnuită un nume propriu în sens logic, dar el crede că cuvintele „acesta" şi „acela" întrebuinţate cu referire la datele senzoriale, ar putea fi cumva citate ca exemplu în acest sens§§§

elementare de tipul subiect-predicat în care subiectul nu este o descripţie definită ci un nume propriu, legat într-un mod mai direct de ceea ce desemnează. Pentru Hilbert şi Bernays, acest fapt nu are mare importanţă, deoarece ei se mulţumesc să trateze enunţuri cum sînt „2 4-2 = 4” ca elementare în raport cu ceea ce urmăresc ei. Dar faptul ar fi trebuit să-l preocupe pe Frege mai mult decît s-a întîmplat în realitate, deoarece Frege susţinea că orice desemnare are un sens, ceea ce sugerează cel puţin că toate desemnările sînt descripţii.

într-o notă la articolul său *Vber Sinn und Bedeutung,* Frege scrie : ,,în cazul unui nume propriu ca atare, cum ar fi «Aristotel», părerile privitoare la sens pot fi deosebite. De exemplu, am putea accepta ca sens: elevul lui Platon şi învăţătorul lui Alexandru cel Mare. Cel care procedează astfel va lega de propoziţia «Aristotel s-a născut la Stagira» un alt sens decît acela care ar admite ca sens al acestui nume: învăţătorul lui Alexandru cel Mare s-a născut la Stagira. Cît timp referinţa ră- mîne aceeaşi, oscilaţiile sensului pot fi tolerate, însă ele trebuie evitate în structura teoretică a unei ştiinţe demonstrative şi nu ar trebui să apară într-o limbă perfectă”'.

Ideea este nesatisfăcătoare, deoarece ea confundă sensul numelui cu ceea ce sugerează el unui ascultător sau altuia şi astfel estompează caracterul deosebit al numelor proprii uzuale. Un om care a aflat cuvîntul „Aristotel" dintr-un dicţionar clasic dar nu-şi aminteşte din articolul respectiv decît că Aristotel s-a născut la Stagira nu ai considera din acest motiv enunţul „Aristotel s-a născut la Stagira’ ca o remarcă inutilă de felul celei „Cel ce s-a născut la Stagira, s-a îăscut la Stagira”. Pe altă parte, el ar admite, desigur, că era de prisos >ă spunem „Aristotel se numeşte Aristotel”. Morala este evidentă. Jn nume propriu obişnuit funcţionează ca o descripţie definită care mplică sau presupune existenţa unui lucru denumit prin acel nume n mediul vorbitorului şi ascultătorului. Unele nume, cum este numele le persoană „Tommy", mai implică şi că lucrul astfel denumit este de in anumit gen, de exemplu o fiinţă umană tînără, de sex masculin- \tunci cînd este necesar, puterea selectivă a numelui propriu poate fi ntărită prin cuvinte suplimentare, ca „Tommy al tău”, „ Jones junior", ,Londra, Ontario”. Ca şi descrierile, numele proprii pot fi desigur ntrebuinţate uneori fără să implice o existenţă, şi anume atunci cînd ;înt împinse la sinucidere. Dar faptul că

********** *Vber Sinn und Bedeutung,* p. 27.

pare cam paradoxal să spu- îem „Homer nu a existat niciodată” arată limpede că întrebuin- area normală a unui nume propriu presupune existenţa unui lucru lenumit de acest nume. Astfel, cuvintele „New College” („Colegiul 'Qou”), au devenit un nume propriu cînd au fost folosite pentru >rima oară de către locuitorii Oxfordului ca şi cum ar fi fost echiva- ente cu expresia „colegiul pe care îl au în vedere de obicei oamenii le aici atunci cînd spun «New College »”.

A spune, ca Russell, că numele proprii obişnuite sînt un fel de descripţii definite, poate da loc la anumite confuzii, dar este clar că numele iroprii obişnuite şi descripţiile definite suscită aceleaşi probleme, deoarece întrebuinţarea lor implică, însă nu garantează, existenţa ucrurilor ale căror desemnări sînt. în acest caz, este oare rezonabil ă căutăm ceea ce Russell numeşte nume proprii în sens logic ? Potri- it explicaţiei sale, dacă „A” este un nume propriu în sens logic, nu ste numai inutil ci de-a dreptul absurd să spunem că „A există", eoarece, deşi „A” trebuie să desemneze ceva, actul de desemnare u trebuie să implice că lucrul posedă o însuşire sau alta. Or, aceasta are să fie o cerinţă imposibilă. într-adevăr, desemnarea este în esenţă dectarea printr-un semn a unui lucru propus atenţiei noastre, iar un ;mn care ar sluji acestui scop trebuie să implice ceva, deşi nu se cere i implice nimic mai mult decît ideea că există un lucru pe care semnul desemnează unui anumit grup de persoane. Cînd însă Russell spuiie i un cuvînt nu poate fi un nume propriu în sens logic dacă nu desem- ;ază ceva de care vorbitorul este nemijlocit conştient, el introduce altă cerinţă, de un tip cu totul diferit. într-adevăr, declaraţia lui gerează că el nu caută o desemnare lipsită de orice implicaţie exis- nţială, ci o desemnare a cărei implicaţie este garantat adevărată, r, chiar dacă teoria cunoaşterii prezentată de Russell în această dine de idei poate fi eronată şi dacă în orice caz trebuie să admitem cunoaşterea pe care i-o atribuie vorbitorului nu poate furniza nici garanţie pentru ascultător, este totuşi foarte interesant să notăm că avem cel puţin o desemnare a cărei folosire garantează întotdeaun< adevărul implicaţiei sale, atît pentru cel ce o aude cît şi pentru cel o o rosteşte. Este vorba de cuvîntul „Eu”.

Nu toate pronumele reflexive rostite se bucură de această proprie tate caracteristică. Atunci cînd o persoană temătoare îşi închipuie în mod greşit, că sub patul său se află cineva şi

îşi adună tot curaj u ca să spună: „Tu să ieşi afară!”, „Tu”-ul său nu desemnează nimic deşi el îl rosteşte în mod sincer. Iar cînd în povestea *Hainele noi al împăratului* se înfăţişează un curtean care spune „Ce stofă frumoasă < aceasta!”, deşi nu poate vedea nici o haină în mîinile croitorilor înşelă tori, devine limpede că „aceasta" poate fi întrebuinţat spre a înşela astfel încît să nu desemneze nimic. Dar nici părerea falsă şi nic reaua credinţă (spre deosebire de convenţia dramatică) nu pot duc, la o întrebuinţare a lui „eu” în care acesta să nu mai desemnez, nimic. Desigur, tocmai de aceea, Sf. Augustin şi Descartes erau preo cupaţi în mod deosebit de propoziţia „Eu exist”. în timp ce „Tu ni exişti” şi „Aceasta nu există” sînt observaţii care se expun la ridicol „Eu nu exist” se autoinfirmă. într-adevăr, aici negarea existenţei est, incompatibilă nu numai cu judecata existenţială implicată de folosire; termenului subiect, ci şi cu faptul că observaţia a fost făcută. Ar f însă greşit să presupunem că cuvîntul „eu” se bucură de un privilegii unic printre semnele folosite pentru referire. Deşi adverbele „aici” ş „acum” cu greu s-ar putea numi desemnări, sarcina lor este să contri buie la selecţia obiectelor propuse atenţiei şi ele nu pot să nu-şi îndepli nească în mod satisfăcător misiunea lor. Dacă cineva vrea să vorbeasc; despre un lucru petrecut la Lyonnesse sub domnia regelui Arthur, e trebuie să creadă în mod greşit că există un loc numit Lyonnesse ; că a fost odată un rege cu numele Arthur, sau, dacă nu, ne puter închipui că vrea să-i inducă în eroare pe alţii în această privinţă; dar ni< una din utilizările cuvintelor „aici” şi „acum” nu poate fi impropri într-unul din aceste moduri. Motivul este evident :„aici” şi „acum”, c şi „eu”, nu presupun în întrebuinţarea lor mai mult decît trebuie s aibă loc datorită existenţei unei rostiri. în cadrul unui limbaj cu sinteză bine elaborată, aceste cuvinte sînt doar trei dintre semne utilizate pentru referire, dar ele prezintă particularitatea că nu adauj nimic la ceea ce este deja implicit într-o expresie unitară. Cînd r om strigă: „Ajutor!”, el ne face să înţelegem cît se poate de adecv; prin acest unic cuvînt că el, cel care a rostit cuvîntul, cere ajutor locul şi timpul rostirii făcute.

în ultima instanţă, orice referire la lucruri sau evenimente pârtie lare în spaţiu şi timp constă în localizarea lor prin raportare la act vorbirii. Aşa cum un nume propriu ca „Socrate” individualizează 1 anumit lucru, propunîndu-l atenţiei noastre ca ceea ce este denun >rin acest nume în

mediul din care fac parte vorbitorul şi ascultătorul, ot aşa descripţia „lăptarul” îşi îndeplineşte misiunea oferind suficiente letalii pentru identificarea unui obiect *în contextul vorbirii.* Un pro- edeu mai radical chiar decît acesta este utilizarea timpurilor verbului au a particulelor temporale pentru marcarea timpului unui eveniment n raport cu timpul vorbirii. într-un limbaj artificial în care regulile le întrebuinţare a unui simbol nu iau în consideraţie contextul apari- iei sale, este imposibil să exprimăm judecăţi singulare despre probleme aptice; şi, de aceea, o scriere ca cea a lui Frege nu poate fi mai mult a un supliment la un limbaj natural, extrem de util pentru discuţia irecisă a relaţiilor dintre afirmaţiile generale din matematică şi ştiinţele laturii, dar inadecvat în sine pentru scopurile vieţii cotidiene, precum i pentru analiza metafizică. în fapt, singurele desemnări folosite vreo- lată în logica matematică de către Frege şi succesorii acestuia sînt imboluri pentru entităţi abstracte ca universalele, clasele şi numerele, 'a toate desemnările, acestea îşi îndeplinesc misiunea numai pentru ă au implicaţii în sensul explicat mai sus, dar implicaţiile lor sînt le aşa natură încît nimeni nu le-ar putea contesta cît de cît raţional, şa că ele trec, de regulă, neobservate. Astfel, cel ce vorbeşte despre imanitate sau însuşirea de a fi om admite în mod firesc că există eva care revine sau ar reveni tuturor oamenilor în acelaşi fel. Această iresupoziţie a întrebuinţării nu a fost pusă niciodată în cauză decît le cei ce au o spaimă deosebită de metafizică; precauţia acestora din rmă este evident nelalocul ei, deoarece lucrurile la care se aplică un ermen general trebuie să prezinte cel puţin trăsătura de a fi lucruri 1 care se aplică respectivul termen. în mod similar, oricine utilizează umeralul „2” ca desemnare în propoziţii ca „2 este cel mai mic număr rim" consideră că acesta desemnează un obiect, deoarece admite î toate mulţimile care au doi membri au ceva comun. în acest caz, u este atît de uşor să explicăm conexiunea dintre substantiv şi adjec- vul din care acesta a fost derivat într-o epocă istorică, dar este clar ?1 puţin că nimeni nu poate atribui vreo semnificaţie unui enunţ rivitor la un număr natural fără să recunoască posibilitatea utilizării jmeralului corespunzător în numărarea obiectelor de orice gen. Rezultatul discuţiei noastre poate fi rezumat după cum urmează, ctivitatea de desemnare nu constituie paradigma oricărei utilizări semnelor, ci ceva propriu exprimării judecăţilor în limbaje

care au ins nivelul sintactic de dezvoltare. Putem spune că un semn numit ■semnare are un sens nu pentru că este în sine însuşi expresia a ceva ăci nu este aceasta), ci pentru că utilizarea lui presupune acceptarea iei judecăţi existenţiale. O desemnare singulară implică existenţa ui lucru, şi numai a unuia, de un gen anumit; o desemnare plurală plică existenţa mai multor lucruri de acel gen. O desemnare de felul celei pentru care Russell a făurit termenul tehnic „descripţie definită este o expresie derivată într-un mod cît se poate de evident dintr- expresie funcţională care ar putea fi întrebuinţată în formularea judecă ţii existenţiale pe care o implică. Un nume propriu obişnuit, de pild „Socrate", este echivalent ca utilizare cu o descripţie de forma „lucrt numit Socrate", deşi ar fi greşit să-l considerăm o abreviere a unt atare descripţii, dat fiind că este propus de expresia „numit Socrate şi deci este în mod evident mai primitivă. La fel, cuvinte aparent reflt xive ca „tu" şi „acesta" sînt echivalente ca uz cu descripţii ca „pei soana căreia mă adresez acum" şi „lucrul la care sînt acum atent' Dacă judecata implicată de o desemnare este falsă, desemnarea n reuşeşte să desemneze nimic. Dar există o desemnare, şi anume ,,eu' care nu poate să nu desemneze ceva cînd este utilizată de vorbite potrivit convenţiilor gramaticale care îi sînt proprii. Desemnarea pre zintă această particularitate deoarece nu serveşte decît la explic tarea a aceea ce este deja implicit în orice expresie unitară. Pentru înţelegere adecvată a rolului jucat de desemnările unor anumite lucru: şi evenimente la nivelul sintactic al vorbirii este indicat într-adevă să nu uităm niciodată că propoziţiile compuse funcţionează ca întreg în acelaşi mod ca expresiile unitare şi că, de aceea, ele pot să exprim judecăţi deosebite în contexte deosebite. Desemnările presupuse reprezenta entităţi abstracte ridică probleme speciale, dar şi ele cuprin implicaţii de existenţă, deşi faptul poate fi trecut cu vederea pînă cîn aceste implicaţii nu sînt puse în dezbaterea filosofilor.

3. *Problemele intensionalităţii*

în logica modală noi vorbim despre judecăţi, conferind acestor atribute cum ar fi posibilitatea şi relaţii cum ar fi implicaţia strict: De aceea, este necesar ca simbolismul nostru să asigure într-un f oarecare desemnarea ca şi

exprimarea judecăţilor. Lewis şi numero alţi autori care au scris despre aceasta evită introducerea unui nc simbolism special admiţînd în schimb tacit că ori de cîte ori o expres propoziţională apare într-un loc adecvat pentru desemnarea un judecăţi, această expresie trebuie citită ca şi cum ar fi precedată < un prefix ca „judecata că - ■ Astfel, O *P* este considerat o abrevie pentru *Este posibil că P,* iar *P Q* ca abreviere pentru *Judecata că a loc P implică strict judecata că are loc Q.* în capitolul anterior am intr dus semnul § ca prefix de transformare a expresiei unei judecăţi într desemnare, dar am stipulat că acest semn ar putea fi omis acolo un s-ar putea presupune în mod adecvat că a fost absorbit de un sen modal ca cel al lui Lewis. Evident, scrierea lui în contexte în care **on** erea nu creează confuzii nu duce la nici un cîştig, deşi seninul se poate 'ovedi util în unele prilejuri, pentru a aminti faptul că în logica modală nunţurile sînt făcute despre judecăţi şi au ca subiecte şi obiecte gramaticale desemnări de judecăţi. Construcţia cu care avem de-a face ici este asemănătoare celei a vorbirii indirecte. Aşa cum observa Frege 11 articolul său *Uber Sinn und Bedeutung,* o clauză care începe cu „că" re ca referinţă ceea ce ar fi sensul cuvintelor, dacă ele ar fi apărut ără acel „că".

întrucît semnul § are ca efect transformarea expresiilor judecă- ilor în desemnări ale acestora, semnul poate fi aplicat şi în simbo- ismul logicii, în scopul construirii desemnărilor de funcţii propoziţio- tale într-un mod care evită dificultăţile lui Frege. Cu alte cuvinte, >utem scrie *§xFx* cînd vrem să ne referim la sensul semnului func- ional *Fx* şi în mod similar *§xyG(x,y)* cînd vrem să ne referim la sensul ui *G(x, y).* Aici, după § se pot insera una sau mai multe litere pentru lega variabila sau variabilele din expresia funcţională care urmează, ir § nu mai poate fi citit ca şi cum ar fi o abreviere pentru „judecata ă", întrucît sensul întregului este „atributul pe care îl are un lucru acă el este *F",* sau : „relaţia în care este un lucru faţă de un altul ind primul este *G* faţă de al doilea"†††††††

avem un mbolism care combină judecăţile cu funcţiile propoziţionale. într-ade- ăr, referirea la acestea din urmă ridică probleme similare. în discuite filosofice despre logică, acestea sînt adesea grupate sub denumita de intensiuni, în opoziţie cu valorile de adevăr (privite ca obiecte), ase şi indivizi, care primesc denumirea de extensiuni. Termenii ntensiune" şi „extensiune" au fost introduşi iniţial, aşa cum am văzut, vederea analizei termenilor generali, dar accepţia modernă este zultatul unei evoluţii naturale şi poate fi acceptată ca o modalitate mvenabilă de analiză a unor probleme legate de cele iniţiale. Uneori mai spune că o descripţie definită ca „regele Franţei" are o intensiune, anume un concept individual, ca acela de a fi singurul rege al Fran- i[u]. Indiferent dacă ne place sau nu această terminologie, putem admite . o descripţie de forma (i *x)Fx* trebuie să aibă un sens, iar cînd se este prilejul de a vorbi direct despre acel sens putem, dacă dorim, -l desemnăm printr-un semn compus de forma §x[Fx • *(y)(Fy => y =*

%)]. în toate cele trei cazuri permise, punerea semnului în faţa unei expresii (delimitată dacă este nevoie prin paranteze) alcătuieşti o desemnare pentru sensul a ceea ce urmează astfel încît acest prefiî ar putea fi numit eventual abstractor intensional.

Putem spune că un limbaj este în întregul său intensional dacă el permite desemnarea intensiunilor, această desemnare fiind totodati esenţială, adică neeliminabilă printr-o traducere deflaţionistă cum a fi cea a lui *Este adevărat că P* prin *P.* Este evident că toate limbii naturale ale popoarelor civilizate sînt calificate pentru acest titlv Tot aşa îl merită şi simbolismul lui Lewis, întrucît în scrierea sa exist convenţia tacită că un semn care figurează ca subiect gramatical *e* predicatului sau ca subiect ori obiect al verbului va fi considerat desemnare a ceea ce exprimă el în mod uzual; am remarcat mai st că în limba engleză există o convenţie similară cu privire la clauzei care urmează după verbul „a spune", dar sînt introduse fără utilizare lui „că". Putem totuşi să concepem anumite limbi în care intei siunile se pot exprima fără să fie vreodată desemnate: astfel <1 limbi se spune că sînt extensionale. Terminologia este întrucîttl confuză, deoarece cei care sînt familiarizaţi cu istoria cuvintelor încel în mod firesc prin a considera o intensiune ca ceva ce este exprimai iar o extensiune ca ceva

[1] R. Carnap, *Semnificaţie şi Necesitate,* Ed. Dacia, 1972, p. 86, 243.

ce este desemnat; dar dacă facem uz de acesl cuvinte în contextul de faţă, trebuie să ne eliberăm de această asociaţl de idei şi să concepem o extensiune ca fiind un individ, o clasă saul valoare de adevăr, iar o intensiune ca fiind sau un concept individul (dacă am admite această expresie destul de confuză), sau o funcţl propoziţională, sau o judecată. Aşa cum am văzut, putem avea îl limbaj rudimentar în care judecăţile pot fi exprimate dar nu potl cîtuşi de puţin desemnate. Conform definiţiei de mai sus, un asemeni limbaj ar fi extensional. îmbogăţit fiind cu expresii funcţionale **1** desemnări ale indivizilor şi claselor, el ar continua să rămînă extel sional. Dacă însă s-ar adăuga desemnări de judecăţi, de funcţii pro **J** ziţionale şi de concepte individuale, ar deveni un limbaj intension® Pe scurt, deosebirea se referă la tipurile de entităţi pe care limbaj® le admit ca subiecte ale discursului iar limbajul intensional este es® ţialmente mai complicat decît cel extensional, deoarece admite a® exprimarea cît şi desemnarea a ceea ce într-un limbaj extensional **H** ar putea fi decît exprimat. **H**

în articolul său *Ober Sinn und Bedeutung,* Frege recunoştea clar p<® bilitatea luării judecăţilor ca subiecte ale vorbirii, dar în *Begriffssch^k* şi de asemenea în *Grundgesetze der Arithmetik* el nu a prevăzut ifl un mijloc pentru această trăsătură a limbajului intensional sau pen® orice altă trăsătură a lui. Cauza acestei omisiuni, după toate pro® bilităţile, era că Frege nu considera necesare limbajele intension® pentru prezentarea matematicii. în prima ediţie din *Principia* Mai® *mutica,* Whitehead şi Russell merg pe aceeaşi linie. Deşi recunosc posibilitatea enunţurilor intensionale cum ar fi „Socrate credea că sufletul său este nemuritor", ei se mărginesc să discute în cea mai mare parte caracteristicile enunţurilor extensionale. Dar în *Begriffsschrift,* precum şi în *Principia Mathematica,* apare un principiu logic

$$x = y => (Jx => fy)$$

care, la prima vedere, pare să fie incompatibil cu admiterea enunţurilor intensionale. în fapt, acest principiu este reciproca principiului leibnizean al identităţii indiscernabilelor: „Eadem suntquorum unum potest substitui alteri salva veritate" ‡‡‡

numit principiul indiscemabilităţii identicilor[12]. După cîte ştim, acest principiu tiu a fost pus sub semnul întrebării nici măcar de către acei filosofi :are nu găsesc plauzibilă aserţiunea lui Leibniz; şi totuşi se pare că d are consecinţe extraordinare. Să presupunem, de exemplu, că substi- :uim „12" pentru *x,* „suma celui de-al treilea şi al patrulea număi irim" pentru şi „papa ştie că numărul apostolilor este - • •" pentru /. Munci obţinem un enunţ pentru *x = y* şi un alt enunţ adevărat pentru *x,* dar aplicînd de două ori *modus ponens* căpătăm concluzia : „Papa tie că numărul apostolilor este suma celui de al treilea şi al patrulea îumăr prim", ceea ce este cel puţin foarte îndoielnic. Raţionînd similar, >utem demonstra paradoxuri în teoria modalităţii, ca de exemplu para- oxul că orice enunţ de identitate adevărat este cu necesitate adevărat, ntr-adevăr. Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară, iar ,uceafărul de ziuă satisface funcţia exprimată de cuvintele „este necesar ă Luceafărul de ziuă este identic cu • • •". Se pare deci că Luceafărul e ziuă trebuie să satisfacă şi funcţia, adică este necesar ca Luceafărul e ziuă să fie identic cu Luceafărul de seară.

Ce putem face în această situaţie delicată? în *Tractatus Logico- 'hilosophicus* (aforismul 5. 54), Wittgenstein susţine că un semn proporţional poate apărea în cadrul altuia numai în calitate de argument 1 unei funcţii de adevăr. în forma în care este expus, acest enunţ ste evident fals, deoarece semnul propoziţional „mîine va ploua" nu pare în calitate de argument al unei funcţii de adevăr în cadrul proporţiei „Brown crede că mîine va ploua". Dar enunţul lui Wittgenstein oate fi considerat eventual ca un mod aforistic de a spune că orice >stire dintr-un limbaj intensional se poate traduce fără pierdere într-un mbaj extensional. Această teză a extensionalităţii, cum este ea denu- ită acum, a fost adoptată de Russell în introducerea sa la a doua ediţie din *Principia Mathematica,* publicată în 1925, şi a fost susţinută amplu de Carnap în cartea sa *Logische Syntăx der Sprache™,* care a văzut lumina tiparului în 1934.

Semnele compuse de genul celor pe care le construim cu abstractorul nostru intensional se pot elimina foarte uşor din unele contexte, în care ele figurează împreună cu expresii

---

[1!] Această denumire a fost propusă de W. V. Quine în cartea sa *From a Logical ini of View,* p. 139.

[13] §§ 67-71, 74-81.

destinate în mod special pentru anularea acţiunii abstractorului. Astfel, propoziţia §P *este adevărat* poate fi înlocuită prin *P,* iar *X are* (sau *exemplifică) §yFy* prin *FX.* Dar acestea sînt cazuri speciale. în general, Carnap se bazează pe o metodă de reducere în care desemnările intensiunilor sînt înlocuite prin desemnări de expresii, în timp ce predicatele adecvate pentru intensiuni sînt înlocuite prin predicate corespunzătoare adecvate pentru expresii. De exemplu, conform principiilor lui Carnap, „Brown crede că mîine va ploua" este redus la „Brown îşi spune lui însuşi, plin de convingere: «Mîine vapkw ua »" ; „Este necesar că 7 + 5 = 12" este redus la „Enunţul «7 + 5 = 12> este analitic" ; „Platon a scris o carte despre dreptate" este redus la „Plafon a scris o carte care conţine cuvîntul «dreptate » sau ceva echivalent' şi aşa mai departe. Cînd traducerea conţine o propoziţie sau o expresie pusă între semnele citării, această propoziţie trebuie înţeleasă ca o parte componentă a desemnării în sine şi de aceea nu poate fi interpretată ce un component gramatical al propoziţiei principale. în particular, nu se poate admite că un cuvînt sau o expresie care figurează ca parte a une atare propoziţii puse între semnele citării se poate |înlocui după plac, prin tr-un alt cuvînt sau expresie avînd aceeaşi referinţă. într-adevăr, con venţiile făcute cu privire la citare ne permit să utilizăm „«7+5=12»" ca < desemnare pentru propoziţia „7 + 5 = 12", dar desigur ele nu n permit să utilizăm ,,«7+5 = numărul apostolilor»" ca desemnare pen tru propoziţia „7 + 5 = 12". Pe baza acestor considerente, se par că putem obţine imediat o soluţie a dificultăţilor noastre. Cînd, d exemplu, ne dăm seama că enunţul „Este necesar ca Luceafărul d ziuă să fie identic cu Luceafărul de ziuă" însemnează acelaşi lucru c „Propoziţia «Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de ziuă este analitică", putem vedea că enunţul nu se referă la Luceafări de ziuă, ci la un anumit ansamblu de cuvinte, şi că nu avem nici funcţie exprimată prin „Este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie idei tic cu *x",* aşa cum nu avem o funcţie exprimată de cuvintele „Propi ziţia «Luceafărul de ziuă este identic cu *x* » este analitică".

împotriva unora dintre reducerile prin care Carnap îşi ilustrea teza se pot aduce obiecţii. De exemplu, ne putem întreba dacă a gîn înseamnă întotdeauna a vorbi cu tine însuţi. Dar, incontestabil, aceas teză este foarte plauzibilă. Cînd auzim pentru prima dată despre pai doxurile

intensionalităţii ne simţim înclinaţi să spunem că a fi cu necesitate identic cu Luceafărul de ziuă nu este un atribut real al unor obiecte existente în mod independent, aşa cum credeam atunci cînd am întîlnit pentru prima dată principiul lui Frege cu privire la indiscer- nabilitatea identicilor, ci este ceva legat de limbajul uman ; teza exten- sionalităţii precizează această idee. Dacă respingem teza, aceasta nu trebuie să se datoreze numai faptului că unele ilustrări aduse de Carnap nu ne dau satisfacţie, ci şi unei obiecţii de principiu împotriva modului său de tratare a enunţurilor intensionale; de aceea, cel mai indicat este să supunem unui examen critic un caz simplu de vorbire indirectă, adică un caz în care pare cel mai plauzibil să afirmăm că utilizarea limbajului intensional nu este decît un substitut pentru relatarea cuvintelor rostite efectiv.

Să considerăm deci enunţul: „Oamenii cavernelor spuneau copiilor că focul frige''. Enunţul este lesne de înţeles, dar nici un om inteligent care îl aude nu presupune că oamenii cavernelor spuneau copiilor lor cuvintele noastre „Focul frige", sau orice alte cuvinte aparţinînd unei limbi cunoscute astăzi. Dacă se subliniază că enunţul se referă realmente' la sunetele pronunţate de oamenii cavernelor, reducerea optimă pe pe care o putem oferi este : „Oamenii cavernelor spuneau copiilor lor o propoziţie care însemna în limba lor acelaşi lucru ca «Focul frige » în limba noastră". Aceasta trebuie să fie adevărată, dacă originalul este adevărat; şi reciproc, dacă această reducere este adevărată, atunci enunţul iniţial trebuie să fie adevărat. Trebuie să remarcăm însă că observaţia atribuită oamenilor cavernelor este specificată aici prin echivalenţa sa ca semnificaţie cu o propoziţie din limba noastră. Urmînd această metodă, evităm o evidentă reîntoarcere la un limbaj intensional, ca cea implicată în afirmaţia: „Oamenii cavernelor spuneau copiilor lor o frază care în limba lor însemna că focul frige". [Nici măcar nu adoptăm vreo concepţie cu privire la semnificaţie, care ar putea fi cumva considerată a fi primejdioasă. într-adevăr, noi nu spunem altceva decît că expresia folosită de oamenii cavernelor însemna în limba lor acelaşi lucru cu ceea ce însemnă acum o anumită propoziţie din limba noastră de azi şi este posibil ca noţiunea de a avea aceeaşi semnificaţie să poată fi explicată satisfăcător fără a recurge [a ceea ce se numeşte uneori în mod abuziv reificarea sau ipostazierea semnificaţiei. Dar reducerea pe care o oferim

rămîne totuşi nesatisfăcă- :oare, deoarece introduce o referire la limba noastră, care nu figurează h enunţul iniţial§§§

enunţurilor intensionale prin enunţuri referitoare numai la simboluri, de fapi el nu poate face să pară acceptabile traducerile sale altfel decît permi ţînd fiecărui simbol menţionat de el să-şi păstreze statutul său ling vistic. într-un cuvînt, semnele citării de care face uz nu indică, aş; cum îşi închipuie Carnap, menţiunea, ca distinctă de utilizare, a sem nului; ele indică mai curînd o utilizare specială, bazată pe menţionare şi echivalează în fapt cu desemnarea sensului exprimat de simbo în cazul cînd ar apărea fără semnele citării. Cu toate acestea, încei carea extensională de tratare a paradoxurilor intensionalităţii n poate învăţa ceva. într-adevăr, un abstractor intensional funcţioneaz în anumite privinţe la fel ca semnele citării.

în orice expresie prepoziţională care conţine o desemnare de orice gen, sensul întregului depinde de sensul desemnării, ca şi de sensul celorlalte semne din cuprinsul expresiei, dar în cazurile simple care se numesc extensionale valoarea de adevăr a judecăţii exprimate de întreg nu depinde de sensul desemnării ca distinct de referinţa acestuia. Astfel, judecata că Luceafărul de ziuă se învîrteşte în jurul soarelui este distinctă de judecata că Luceafărul de seară se învîrteşte în jurul soarelui, dar ambele au aceeaşi valoare de adevăr, deoarece Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară. Tocmai aceasta vrea să spună principiul indiscernabilităţii identicilor. Pe de altă parte, în cazurile mai complicate care se numesc intensionale, valoarea de adevăr a întregului poate foarte bine să depindă de sensul unei desemnări cuprinse într-o desemnare prepoziţională ce constituie la rîndul ei o parte a întregului. Astfel, este adevărat că este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie Luceafărul de ziuă, dar nu este adevărat că este necesar ca Luceafărul de ziuă să fie Luceafărul de seară. în general, indiferent de semnificaţia literelor *F, G* şi *H* , valoarea de adevăr a judecăţii exprimate de F{§G[(ix)7îx]} depinde de referinţa lui §G[(i*x)Hx*], iar aceasta depinde la rîndul ei de sensul lui *G*[(ix)/7x], care la rîndul său depinde de sensul lui *(ix)Hx,* astfel că din egalitatea

$$(ix)Hx = (yy)Jy$$

care garantează numai identitatea de referinţă, nu putem conchide cu certitudine

în acest caz, abstractorul intensional, care îndreaptă atenţia asupra sensului semnului din domeniul lui de acţiune, serveşte şi pentru a aminti că nu ne putem baza pe principiul indiscernabilităţii identicilor în vederea justificării substituţiei în cadrul acestui domeniu de acţiune.

Sarcina noastră s-ar simplifica în mare măsură dacă am putea spune mai mult, că nici o expresie de forma *F(§Gy)* nu exprimă vreodată o funcţie prepoziţională. Atunci am avea o paralelă aproape exactă Entre regulile de utilizare a abstractorului nostru intensional şi cele de ttilizare a semnelor citării: principiul indiscernabilităţii identicilor ir putea fi acceptat fără nici o condiţie sau restricţie, şi cuantorii care cuprind în domeniul lor de acţiune abstractori intensionali şi leagă variabile din domeniul de acţiune al abstractorilor nu ar mai suscita iificultăţi, deoarece nu s-ar mai afla expresii înzestrate cu semnificaţie avînd cuantori în această poziţie. Dar uzanţele lingvistice se idică împotriva acestei propuneri pripite. în limba engleză, proporţia „Era un lucru despre care el spunea că îi place" este net distinctă ca semnificaţie de „El spunea că era un lucru care îi plăcea" şi nu încape îndoială că prima propoziţie are forma (2j')F(§Gjy). A fi considerat stupid de către Lenin, a fi suspectat de oportunism de către Troţki, a fi temut ca un rival de către Stalin — toate acestea sînt funcţii intensionale sau atribute; cel ce citeşte ziarele interesîndu-se de problema în cauză poate să găsească uşor expresii pentru mult mai multe atribute. în această ordine de idei, este desigur important să distingem între *F(§Gy)* şi F(§vG_v). în timp ce prima exprimă o funcţie inten- sională care poate avea ca valoare judecata exprimată de F(§GZ), a doua exprimă o judecată intensională despre funcţia desemnată de **§3'GJ/** ; tocmai pentru păstrarea acestei distincţii se cere ca argumentul acestei expresii să fie legat printr-un alt *y,* inserat imediat după §.

Dificultăţile noastre provin din faptul că avem funcţii intensionale şi că unele din ele nu pot fi satisfăcute de un obiect ca atare, ci numai de un obiect considerat a cădea sub incidenţa unei anumite descripţii. Astfel, Oedip vroia să-l ucidă pe odiosul străin care îi poruncise să se dea la o parte de pe drumul strimt care ducea de la Delphi la Phocis, dar el nu vroia să-şi ucidă tatăl, deşi străinul odios era de fapt tatăl lui. Ne putem declara necondiţionat de acord cu cel ce susţine că funcţiile de acest fel au un statut logic special, deoarece expresiile lor intră numai în discursul de ordinul doi (adică în discursul ce presupune o utilizare mai simplă a

simbolurilor, în sensul că acestea se referă la ceea ce exprimă funcţiile şi nu la înseşi aceste funcţii în mod direct) ; se pare însă că nu avem motive reale să negăm că acestea sînt funcţii, şi, de îndată ce am admis acest lucru, devine clar că singurul mod de a ieşi din impas este de a restrînge principiul indiscemabilităţii identicilor astfel încît el să se aplice numai la funcţii extensionale (adică neintensionale).

Insistarea asupra principiului indiscemabilităţii identicilor înseamnă de fapt a spune că în contextul afirmaţiei noastre nu recunoaştem alte funcţii decît cele existenţiale. Restrîngerea principiului în modul propus mai sus înseamnă admiterea faptului că, dacă *Fx* exprimă o funcţie intensională, nu putem infera *formal* din cele două premise, *FX şi X = Y,* concluzia *FY.* Fără îndoială, natura unor contexte intensionale arată destul de limpede că un nume sau o descripţie se pot substitui în locul altora *salva veritate,* dar este greşit să ne aşteptărr la reguli de substituţie valide în toate contextele de acest fel. Să presu punem, de exemplu, că nu ne îndoim de adevărul enunţului ,,Sf. Tonu d'Aquino a spus că doctrina Filosofului asupra sufletului era adevă rată". Putem repeta enunţul, punînd „Aristotel" în loc de „Filoso ful" ? Negreşit. Chiar dacă Sf. Toma a scris cuvîntul latin *Philoso phus* în loc de *Aristoteles* în pasajul pe care pretindem să-l redăm substituţia noastră nu depăşeşte limitele permisiunii acordate prin obicei unei persoane care foloseşte vorbirea indirectă. Se poate argumenta, într-adevăr, că pentru mulţi cititori noua noastră versiune va fi preferabilă originalului, ca dînd naştere la mai puţine neînţelegeri. Putem atunci să substituim după plac „Stagiritul" pentru „Filozoful" ? Este cu neputinţă de dat un răspuns simplu. în secolul al optsprezecelea, schimbarea n-ar fi întîmpinat probabil vreo obiecţie, deoarece aproape toţi cititorii ar fi recunoscut această expresie ca o descriere modernă a lui Aristotel introdusă din motive literare, şi de aceea n-ar fi fost tentaţi să creadă că Sf. Toma îl identifica pe Aristotel referin- du-se la locul de naştere al acestuia. în secolul douăzeci, unii cititori ar recunoaşte manierismul secolului optsprezece, dar alţii ar putea fi cumva induşi în eroare, fiind împinşi să creadă că Sf. Toma a menţionat Stagira ; şi, în sfîrşit, alţii, care nu ştiu că Aristotel s-a născut la Stagira, ar putea crede chiar că Sf. Toma avea în vedere o altă persoană. Nu pot exista reguli formale de substituţie valabile pentru toate contextele intensionale, pentru că

ideile: afirmare, părere, cunoaştere, dorinţă, intenţie etc., idei pe care de multe ori le exprimăm prin intermediul limbajului intensional, nu sînt idei formale. în fapt, ele sînt convenţii care trebuie respectate în contexte de diferite feluri (căci fără convenţii de un fel sau altul nu poate exista vreo comunicaţie de felul celor pe care le avem în fapt), dar ar fi derutant să vorbim despre aceste convenţii ca despre obiecte de studiu ale logicii. Logica, aşa cum o considerăm în această carte, studiază forma propoziţiilor [spre deosebire de conţinutul lor şi unica parte a teoriei enunţurilor intensionale care poate fi numită în mod adecvat formală este logica modală pură. De aceea, nu este surprinzător că aceasta a suscitat interesul cel mai mare în rîndul logicienilor.

într-un enunţ modal adevărat, fie de forma □§G[(ix)7fx]fie de forma O §G [(i*x)Hx]* substituirea lui *(iy)Jy* pentru (i*)7/x poate duce la falsitate, sau chiar la absurditate, dacă ea nu poate fi autorizată de nimic nai mult decît de o aserţiune contingenţă

(ix)Hx = iyy)Jy.

Astfel, ar fi ridicol să argumentăm de la premisa modală

- §(12 < 13)

i adevărul istoric

12 = *numărul apostolilor*

i concluzia modală

/ ^*(numărul apostolilor* < 13).

De asemenea, nu este suficient să spunem, ca în teoria silogismelor modale a lui Teofrast, că concluzia trebuie să aibă modalitatea premisei mai slabe. într-adevăr, ar fi la fel de ridicol să scoatem din premisa modală

O § ~ {numărul apostolilor < 13)

şi adevărul istoric

Numărul apostolilor =12 concluzia modală

O §~(12 < 13).

Pe de altă parte, în toate contextele de acest fel putem să efectuăm substituţii *salva veritate* atunci cînd desemnarea care urmează a fi substituită are cu necesitate aceeaşi

referinţă ca desemnarea pe care o va înlocui, de ex. cînd „7 + 5” va fi pus pentru „12”. Aceasta nu înseamnă că rezultatul substituţiei va fi atunci o expresie avînd exact acelaşi sens ca expresia iniţială, ci înseamnă pur şi simplu că modificarea efectuată nu va afecta valoarea de adevăr a întregului. Două desemnări care au în mod necesar aceeaşi referinţă pot diferi totuşi ca sens şi sînt astfel capabile să determine o deosebire de sens între două expresii altfel similare în care ele apar, dar trebuie să fie astfel legate între ele încît oricare s-o poată înlocui pe cealaltă într-un context modal fără să-l facă fals. Pentru a se înţelege cauza acestui lucru, să ana lizăm încă o dată modul în care apar desemnările în contextele modale

Dacă judecata exprimată de O $^{es\frown e}$ adevărată, motivu
trebuie să fie sau faptul că funcţia propoziţională exprimată de Gj este valabilă pentru toate argumentele posibile, sau că ea este impli cată în mod necesar de sensul desemnării *(ix)Hx.* Ca exemplu al prime situaţii putem lua enunţul „Este necesar ca ultima regină a dinastie Stuart să fie moartă sau să nu fie moartă”. Întrucît orice fiinţă trebui să fie moartă sau să nu fie moartă, putem să înlocuim aici „ultima regin din dinastia Stuart” printr-o altă desemnare de acelaşi tip general, făr a afecta valoarea de adevăr a întregului. Ca ilustrare a celei de-a dou situaţii putem lua enunţul „Este necesar că ultima regină din dinasti Stuart a fost femeie”. Aici, sensul desemnării este de maximă însemns tate. Dacă am fi scris în schimb „ultimul monarh din dinastia Stuart’ tot am fi reuşit să ne referim la regina Ana, dar noul nostru enunţ nu a mai fi fost adevărat. Dar chiar şi în ultimul caz, presupoziţia existei ţială a desemnării utilizate de către vorbitor nu este o parte a ceea c el declară că este necesar. Probabil el este încredinţat că a exist: o ultimă regină din dinastia Stuart, dar nu că *aceasta* este necesar; i: dacă vrea, el poate să clarifice acest punct, adăugind cuvintele „da< a existat într-adevăr o asemenea regină” sau formulînd întregul enm în forma „Ultima regină a dinastiei Stuart ar fi în mod necesar o femeie’’. într-adevăr, aceste noi moduri de exprimare lasă neschimbată substanţa aserţiunii modale, fără să anuleze obligaţia implicată îndeobşte de întrebuinţarea unei desemnări. în simbolismul logic putem realiza acelaşi efect introducînd *H'x* ca abreviere pentru *Hx • ■ (y) [Hy => y = x],* adică cu sensul *x este unicul lucru H,*

scriind apoi □§(x)(H'x =>*Gx)* în loc de □§G[(ix)H«J. Putem spune că aserţiunile modale din care desemnările au fost eliminate în acest mod sînt în formă redusă. Dacă funcţia prepoziţională exprimată de *Gx* este un truism, atunci □§(%) *[H'x => Gx]* trebuie să fie adevărat, oricare ar fi semnificaţia lui *Hx* şi astfel primul dintre cele două cazuri pe care le-am distins mai sus poate fi subsumat celui de al doilea.

în cursul acestui raţionament am admis, bineînţeles, că orice desemnare care apare într-un context modal poate fi tratată ca o descripţie definită sau ca o abreviere a unei atare descripţii; de exemplu, că „regina Ana" poate fi tratată ca abreviere a expresiei „regina numită «Ana »", iar „12" ca o abreviere pentru „numărul care revine tuturor mulţimilor echivalente în sensul lui Cantor cu mulţimea numerelor {«1», «2», «3», ••• «12»}". Această procedură ne este impusă de necesitatea de a ne îndrepta atenţia în asemenea contexte la sensul desemnărilor noastre. în contextele extensionale, pentru] care principiul indiscernabilităţii identicilor este valabil fără restricţii, numele proprii pot fi utilizate fără să ne gîndim prea mult la sensul lor, astfel că substituirea lui „Napoleon" pentru „Bonaparte" sau *viceversa* pare de multe ori să fie simplă chestiune de stil. în contextele modale însă, situaţia este cu totul alta. într-adevăr, spunem că este necesar că Napoleon este identic cu Napoleon dar că este doar contingent că Napoleon este identic cu Bonaparte ; iar pentru ca să înţelegem aceasta trebuie, aşa cum a arătat Frege, să luăm în consideraţie deosebirile de sens, adică trebuie să privim cele două denumiri ca abrevieri ale unor descripţii. Fără îndoială, nu este necesar să fi existat un om numit „Napoleon" ; dar este necesar ca singura persoană cu numele de „Napoleon", în caz că există o asemenea persoană unică, să fie identică cu singura persoană numită „Napoleon"[15].

Revenind acum la problema substituţiei în contexte modale, să presupunem că ni se dă

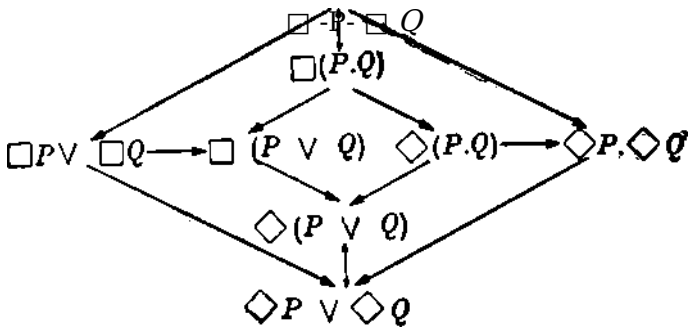
□ §[(ix)77x = *(iy)Jy].* **********

********** în *Principia Mathematica* *14.28, Whitehead şi Russell spun într-adevăr că *(ix)Hx = (ix)Hx* este adevărat dacă şi numai dacă este adevărat. Această restricţie impusă substituţiei în formula *x = x* este cerută de analiza pe care ei o fac formulelor care conţin descripţii definite. în limbile vorbite, problema implicaţiei e-ris- tenţiale este tratată în modul indicat mai sus.

Din această formulă, potrivit regulilor uzuale de utilizare a descripţiilor definite, rezultă formula □§#' [('*)./*] şi, conform procedurii explicate mai sus, această formulă poate fi redusă la rîndul ei la □§(*)L7'* => *H'x}.* Dar enunţul poate fi redus la d§(ˣ) *|H'x ~=> Gx],* şi astfel este uşor de văzut că împreună cu presupunerea identităţii necesare formulată mai sus, enunţul trebuie să implice în mod necesar consecinţa □§(%) *[J'x => Gx],* care, la rîndul ei, constituie forma redusă a formulei

Raţionînd similar, putem arăta că identitatea necesară a referinţei în cadrul celor două desemnări este o condiţie suficientă pentru înlocuirea oricăreia dintre ele prin cealaltă *salva veritate,* într-un enunţ de posibilitate.

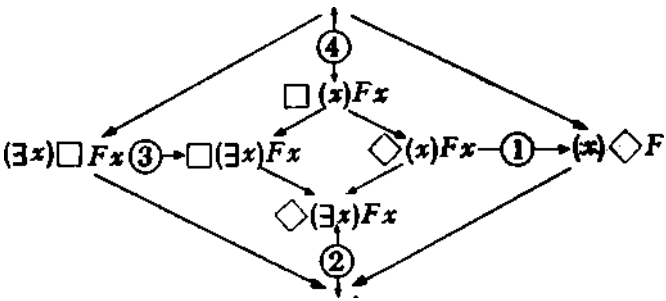
Trecînd la considerarea posibilităţii utilizării cuantorilor pentru a opera peste semnele modale şi deci peste abstractorii intensionali, este natural să presupunem că relaţiile dintre formulele care combină în diverse feluri semnele modale cu cuantorii trebuie să fie guvernate de reguli similare celor pentru relaţiile dintre formulele care combină în diverse feluri semnele modale cu semnele conjuncţiei sau disjuncţiei. Or, în privinţa acestor din urmă reguli există un consens comun şi ele pot fi înfăţişate prin diagrama de mai jos, unde, pentru conciziune şi uşurinţa comparaţiei, am introdus convenţia omiterii din fiecare formulă a abstractorului intensional care ar urma într-o versiune neprescurtată imediat după semnul modal:



Este deci evident că analogia pretinde ca şi primele reguli să fie indicate ca în diagrama corespunzătoare, în care

cuantificarea univer-

ală ia locul conjuncţiei, iar cuantificarea existenţială locul disjunciei :



Formulele patrulaterului interior sînt cele ce nu suscită nici o pro- >lemă, deoarece cuantorii lor intră în domeniul de acţiune al semnelor or modale, în timp ce formulele patrulaterului exterior sînt formule liscutabile, avînd cuantori care operează peste semnele modale. Săge- ile numerotate reprezintă implicaţii necesare garantate de principiile general acceptate ale logicii, iar formulele prevăzute cu numere eprezintă implicaţii necesare, sugerate de analogia sus-menţionată[1]*. Crebuie observat că implicaţiile din ultimul grup sînt singurele legă- uri între formulele celor două patrulatere şi că nu toate sînt indepen- ente între ele. Prin substituţie şi contrapoziţie, (3) se poate deduce in (1), iar (4) din (2), sau viceversa. Dacă se acceptă toate aceste relaţii utem spune că prefixele pătrat şi romb din logica modală se comportă a nişte cuantori noi, universali, respectiv existenţiali. Aceasta iarăşi ste un lucru la care trebuia să ne aşteptăm, în virtutea analogiei, ntr- adevăr, cînd spunem că o judecată este necesară, înţelegem prin ceasta că ea ar fi adevărată în toate lumile posibile, iar cînd spunem *i o* judecată este posibilă înţelegem prin aceasta că ar fi adevărată i unele lumi imaginabile.

Fără îndoială, nu este uşor să găsim exemple care fac ca toate rela- ile numerotate să fie intuitiv plauzibile. Dar am putea argumenta, rentual, că aici motivul este acelaşi cu motivul dificultăţilor pe care iii logicieni cred că le suscită principiile de reducere din logica modală, î limbile naturale, cuvintele modale apar uneori, incontestabil, după

’• Cele patru principii numerotate pot fi găsite la R. Carnap, *Semnificaţie şi necesi-* 1947; (ed. rom. 1972, p. 244). A se vedea şi Ruth Barcan, "A Funcţional Calcu- of First Order Based on Strict Implication", *The Journal of Symbolic Logic,* XI, 46), pp. l-16.

cuantori; dar oriunde ar apare, ele sînt aproape întotdeauna întrebuinţate într-un mod eliptic, adică sînt întrebuinţate ca să semnifice că ceva este necesar sau posibil, după cum este cazul, în raport cu altceva care nu este indicat în mod explicit, dar poate fi identificat cu uşurinţă de către interlocutor. în simbolismul tehnic al logicii modale însă, se presupune că totul este făcut explicit. în consecinţă, dacă încercări să redăm sensul simbolismului tehnic în vorbirea obişnuită, puterr ajunge la anumite dificultăţi, deoarece cuvintele folosite sugerează o suplimentare acolo unde nu se cere nici o suplimentare. Să presupu nem, de exemplu, aprinde" şi $\bar{O}(\hat{Jx})\bar{F}x$ ar însemna „Poate să existe un lucru aprins" Ajungem imediat la dificultatea că cele două propoziţii româneşt sînt fără îndoială neechivalente. într-adevăr, prima propoziţie poat fi aplicată în vederea enunţării faptului că ceva este inflamabil, ia a doua pentru a spune că informaţia noastră nu garantează existenţ focului. Dar dacă aceste aserţiuni ar fi retraduse adecvat în simbolis mul logicii modale, rezultatele ar fi mult mai complicate decît cel două formule legate în schema noastră prin relaţia (2). în logica modali rombul semnifică numai necontradicţia, şi, conform acestei interpre ţări stricte, cele două formule menţionate mai sus par a fi logic ech: valenţe, cel puţin pentru universul non-vid, asumat îndeobşte de log cieni. Din păcate, nici un logician care adoptă interpretarea strict nu a oferit exemple care să facă cu totul satisfăcătoare relaţiile numi rotate prin (1) şi (3).

Nici unul din sistemele de logică modală considerate de către (I. Lewis nu conţine mijloace pentru operarea cuantorilor asupi semnelor modale, iar dezvoltarea schiţată în ultimele cîteva alineai nu a fost acceptată de către toţi logicienii. Acei care obiectează îr potriva ei susţin sau că inovaţia este inutilă, sau că este absurd Astfel, după G. H. von Wright, ea este o complicaţie de prisos, deo rece orice lucru exprimabil în acest mod poate fi exprimat şi altf< într-un mod mai simplu††††††††††††††††††††††††††††††††††††††. Spunînd aceasta, el pleacă de la presup nerea că toate atributele lucrurilor se pot împărţi în două grup* atribute formale, a căror prezenţă în lucrurile care le posedă şi abse ţă în lucrurile care nu le posedă este necesară, şi atribute materia: a căror prezenţă în lucrurile care le posedă şi absenţă în lucrurile care i le

---

†† *An Essay on Modal Logic,* p. 27.

posedă este numai contingenţă. De exemplu, se presupune că atribute aritmetice fac parte din prima grupă iar culorile din a doua. E această ipoteză (pe care o numeşte principiul predicaţiei) pare urmeze că cuantorii ce operează peste semnele modale sînt inul pentru cel ce ştie dacă un atribut este formal sau este material. în adevăr, dacă *Fx* exprimă un atribut formal, (3*)OFx şi *Qx)OFx* sînt ambele echivalente cu *(Jx)Fx*dacă *Fx* exprimă un atribut material, prima expresie este în mod evident absurdă, în timp ce a doua este un truism.

Von Wright admite că principiul său are cîteva aparente excepţii; dar principiul este expus unei obiecţii de ordin general, pe care el nu o semnalează. Apartenenţa necesară a unui atribut la un subiect care are acest atribut nu depinde întotdeauna numai de natura atributului. A fi mai mic ca 13 este un atribut aritmetic, şi, dacă vrem, putem spune că el revine în mod necesar numărului 12 ; dar este fals că numărul apostolilor este în mod necesar mai mic ca 13, deşi numărul apostolilor este incontestabil 12. Se pare că Wright a fost cumva indus în eroare aici de distincţia dubioasă între modalităţile *de dicto* şi modalităţile *de re,* distincţie pe care o preia de la autorii medievali. Dacă expresia *de re* este înţeleasă în sensul că ar exclude dependenţa modalităţii de sensul termenului subiect ca distinct de referinţa acestuia, atunci în mod paradoxal, singurele enunţuri modale *de re* adevărate sînt cele în care termenul subiect poate fi înlocuit *salva veritate* printr-o altă desemnare oarecare a unui lucru din aceeaşi categorie, adică enunţuri ca „în mod necesar, regina Ana a murit sau nu a murit'', unde termenul subiect nu aduce nici o contribuţie importantă iar adevărul întregului depinde de caracterul tautologic al expresiei „a murit sau nu a murit".

Obiecţia lui W. V. Quine împotriva cuantificării peste semnele modale este şi mai radicală: el spune că această cuantificare este nu numai inutilă, ci şi absurdă, şi sugerează chiar că am face bine să abandonăm întreaga teorie a modalităţii, împreună cu orice referire la judecăţi şi atribute, ce pare a fi cerută de această teorie. Argumentele sale pot fi rezumate în mod liber după cum urmează, cu ajutorul unui exemplu la care am recurs deja. Acei care permit utilizarea unor cuvinte şi expresii modale consideră că 0(12 < 13) exprimă o judecată adevărată. Dacă acceptăm acest lucru, vom admite, probabil, ?i faptul că expresia □(% < 13)

exprimă o funcţie satisfăcută de către numărul 12, iar atunci nu mai putem refuza formarea propoziţiei existenţiale (3x)O(x< 13). Cum trebuie să înţelegem însă această inovaţie ? Nu poate fi vorba despre asertarea existenţei unui număr care posedă o anumită proprietate; într-adevăr, dacă un asemenea îumăr ar exista, acel ce a făcut afirmaţia ar putea fi solicitat pe drept cuvînt s-o justifice prin enunţarea explicită a numărului care se bucu- ă de proprietatea respectivă, iar pentru aceasta ar fi indiferent dacă ir răspunde spunînd „12" sau „numărul apostolilor", întrucît aceste Lesemnări au aceeaşi referinţă. Pe de altă parte, este inutil să pro- mnem, aşa cum au făcut unii logicieni, ca variabila *x* să poată lua ca valori intensiuni de un anumit gen. într-adevăr, admiţînd intensi- unile ca valori posibile ale variabilelor noastre, trebuie să abandonăm principiul indiscernabilităţii identicilor; iar atunci, dat fiind că nu dispunem de nici un criteriu clar al identităţii, vom fi incapabili să spunem ceea ce vrem să spunem cu privire la extensiuni:

„Ontologiile intensionale şi extensionale sînt ca untdelemnul şi apa. Admiterea atributelor şi judecăţilor concomitent cu folosirea liberă a cuantificării şi a altor expresii de bază exclude indivizii şi clasele. Ambele genuri de entităţi îşi pot găsi locul în aceeaşi logică numai prin intermediul unor restricţii, ca acelea introduse de Church, care permit păstrarea lor separată, iar aceasta seamănă foarte mult cu două logici separate, avînd fiecare universul ei propriu"‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

Considerăm că nu filosofului îi incumbă misiunea de a elimina menţiunea judecăţilor şi atributelor, după cum nu lui îi revine sarcina să afirme că trebuie să eliminăm cuvintele „posibil" şi „necesar" din vocabularul nostru logic. S-ar putea ca statutul judecăţilor să suscite unele dificultăţi metafizice, ca acelea apărute în legătură cu natura societăţilor politice; dar aşa cum ar fi greşit să protestăm împotriva extravaganţelor lui Hegel prin afirmaţia „Nu există state"] tot astfel este greşit să replicăm la afirmaţiile confuze ale lui Bolzanc şi Meinong spunînd „Nu există judecăţi". Dacă, aşa cum a arăta! Quine, încercările uzuale ale logicienilor de a opera cu cuantori peste semnele modale sînt deficitare, sursa dificultăţii trebuie căutată îi detaliile simbolizării lor şi nu într-un defect general al oricărei referir

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡

la judecăţi şi modalităţi. Astfel abordată, problema poate fi în fapt rezolvată destul de uşor, după cum putem constata.

Construirea unei formule ca (3x) □ *Fx* sau (x) *O Fx* presupune cunoaşterea prealabilă a semnificaţiei unor formule cum sînt Q *FY ş:* O *FY.* Să considerăm mai amănunţit primul caz. Am văzut dejj că o desemnare care figurează în cadrul unui context modal poate fi întotdeauna eliminată. Dacă desemnarea nu este o descripţie defi nită ci un nume propriu (de ex. „Napoleon"), înlocuim mai întîi aceas tă desemnare printr-o descripţie definită cu acelaşi sens (de ex. „Per soana numită «Napoleon»"). Apoi, din descripţia noastră, să spunen (ix)Gx, extragem predicatul *G'x,* care înseamnă *x este unicul lucrt G.* Şi în sfîrşit, în locul lui □ F[(ix)Gx] scriem □ (x)[G'x => *Fx]* sau (x)Q(G'x *Fx],* care este tocmai un alt mod de asertare conco mitentă, în terminologia necesităţii, a tuturor judecăţilor exprima bile prin formule de implicaţie necesară de forma *G'ZjFZ.* Or, cîm întîlnim formula (3x) |*JFx,* nu ştim care este descripţia relevant a lucrului sau lucrurilor despre care se afirmă că sînt în mod necesal exemplificări ale însuşirii exprimate prin *Fx,* dar avem de luat în eonsideraţie numai două posibilităţi. (3%) QFrv poate însemna *Există eva care în orice descripţie este în mod necesar F,* sau poate însemna *Există ceva care într-o anumită descripţie este în mod necesar F.* Dacă nterpretarea urmărită este prima interpretare *(de re), (Jx)*|~*JFx* nu mate exprima o judecată adevărată dacă *Fx* nu este un predicat ruist şi deci un predicat care urmează de la sine oricărei descripţii maginabile. Dar aceasta echivalează cu a spune că formula controver- ;ată este echivalentă cu *CE(x)Fx.* Dacă, pe de altă parte, interpretarea izată este a doua interpretare, (3*) FF% nu poate exprima o judecară adevărată dacă nu există un lucru care admite, din mulţimea descripţiilor sale posibile, o descripţie ce atrage după sine predicatul *"x.* Dar aceasta este tot una cu a spune că formula controversată ■ste echivalentă cu (3*)Fx. Deci **(3A;)QFx** nu poate reprezenta în rici o interpretare un nou gen de judecată. Raţionînd similar, putem irăta că dacă *(x)OFx* are în genere vreo semnificaţie, ea trebuie să ie echivalentă sau cu *(x)Fx* sau cu O *(Jx)Fx,* astfel că şi aici reiese că nu sîntem obligaţi să admitem operarea cu cuantori peste semnele nodale. Ce-i drept, am fi putut evita toată această controversă nenţinînd integral explicaţia relaţională a modalităţii pe care am ntrodus-o în capitolul anterior, dar în acest caz am fi trecut

cu vede- ea dezvoltarea interesantă a limbajului care face posibilă construirea mor enunţuri de formele nF[(ix)Gx] şi OF[(ix)Gx], şi nu am fi mtut da o expunere plauzibilă a discuţiilor recente în jurul intensio- îalităţii.

4. *Identitate, funcţii şi clase*

în *Begriffsschrift* şi, din nou, în *Grundgesetze der Arithmetik,* Frege i identitatea ca noţiune de bază, pentru care este necesar să se formule axiome speciale. în *Principia Mathematica* (*13.01), pe de altă arte, Whitehead şi Russell evită necesitatea unor axiome speciale e identitate prin introducerea lui *X = Y* ca abreviere pentru *(f) f]X=>*/!Y]. Semnul,,!", pe care îl întrebuinţează aici după litera *f* >te destinat să arate că funcţiile considerate sînt toate *predicative,* i sensul tehnic al cuvîntului. Această restricţie este cerută de teoria unificată a tipurilor a lui Russell, aşa cum vom vedea în capito- il următor, dar autorii subliniază că restricţia nu duce la nici ojpier- ;re reală a generalităţii, deoarece principiul reductibilităţii, pe care îl introduc pentru a atenua rigoarea teoriei ramificate a tipurilor, ne ;rmite să lucrăm cu definiţia în cauză ca şi cum ea ar trata despre ate funcţiile fără restrîngere. Uneori se spune că distincţia dintre funcţiile predicative şi celelalte funcţii este una de *ordin,* dar aces mod de exprimare nu coincide cu accepţia în care putem spune c discursul care necesită un limbaj intensional este de ordin mai înal decît discursul exprimabil într-un limbaj pur extensional, şi nu est suficient pentru înlăturarea dificultăţii legate de limbajul intensic nai. Dacă admitem existenţa unor funcţii intensionale utilizînd totc dată definiţia în forma de mai sus, ne vedem obligaţi la concluzia bi zară că pentru oamenii raţionali nici o identitate nu poate rămîn necunoscută. Luceafărul de ziuă, după cum se pare, nu poate fi iden tic cu Luceafărul de seară, deoarece avem cel puţin o funcţie, şi anum aceea de a fi ştiut de toţi oamenii raţionali drept identic cu Luceafărt de ziuă, funcţie care este satisfăcută de primul obiect, dar nu de a doilea. Din acest motiv, ceea ce s-a spus mai sus în legătură cu tra tarea identităţii la Frege trebuie să se aplice, *mutatis mutandis,* ş la tratarea acestei chestiuni în *Principia Mathematica.* Cu alte cuvinte definiţia identităţii pe care o dau Whitehead şi Russell trebuie res trînsă astfel încît să se refere numai la funcţiile extensionale. Da atunci avem oare

un motiv temeinic pentru a prefera un mod de tra tare celuilalt ?

în sistemul lui Frege, ca şi în *Principia Mathematica,* se presupun că teoria identităţii este o parte a logicii, dar nu este absolut clar d ce se include ea în logică, iar un critic ostil ar putea obiecta că Freg nu ne-a dat o expunere generală a logicii pe baza căreia să puteri decide dacă el a rămas fidel programului său în acest punct. Cîn< însă noţiunea de identitate este introdusă prin intermediul unei defi niţii, pare evident la prima vedere că teoria trebuie să constitui o parte a logicii. într-adevăr, semnele identităţii apar acum numa ca un procedeu de abreviere a unor propoziţii care s-ar fi putut enunţ cu semne care sînt în exclusivitate şi fără nici un dubiu semne logic< Dar acest aparent avantaj poate fi cîştigat numai prin utilizare cuantorului (/) în cadrul definiţiei. Este adevărat că, potrivit propri lor sale explicaţii, formula lui Frege

% = y => {fx => fy)

trebuie tratată ca abreviere a formulei

{f)[x=y => {fx fy)].

Dar am văzut că logicianul este autorizat să utilizeze variabile libe de un fel special pentru exprimarea universalităţii care revine propriii sale enunţări. Speculînd această împrejurare, putem scrie :

X = Y = {FX = FY)

în locul formulei lui Frege, şi nu ca un simplu substitut ci ca expres a unei scheme adevărate în mod banal. în sistemul din *Princip*

Mathematica, pe de altă parte, utilizarea unei variabile funcţionale *legate* este esenţială în definirea identităţii. în adevăr, deşi Whitehead şi Russell vor să ne facă a înţelege că o expresie de forma *X* = Y poate fi privită ca abreviere a unei expresii de forma *(f)[f\X* /!Y],

nu încape îndoială că ei nu vor să sugereze că orice expresie de forma *X = Y* poate fi înlocuită, pretutindeni unde apare, printr-o expresie de forma *F |X => F* !Y, sau viceversa. Or, aplicarea cuantorilor la variabile funcţionale marchează trecerea la un calcul mult mai complicat decît calculul simplu sau restrîns al funcţiilor propoziţionale pe care l-am considerat pînă acum în acest capitol. Dacă ne gîndim la faptul că acest nou calcul trebuie considerat ca o parte a

logicii, itunci putem spune că Whiteahead şi Russell au redus teoria identităţi la logică, în ipoteza de a fi putut găsi un mod satisfăcător de res- rîngere a definiţiei lor astfel încît ea să privească numai funcţii nein- :ensionale. Dar dacă dintr-un motiv sau altul vrem să vorbim despre dentitate fără a ne crea singuri de îndată toate dificultăţile calculului îou, atunci trebuie să revenim la Frege şi să prezentăm teoria identi- :ăţii ca un calcul mai puţin cuprinzător, în care axiomelor şi regulilor calculului funcţional restrîns li se adaugă două axiome speciale. Unul lin motivele pentru a face aceasta îl constituie tocmai faptul că teoria dentităţii este legată strîns de distincţia dintre limbajul intensional i cel extensional. Distincţia între *Sinn* şi *Bedeutung* i-a fost sugerată centru prima oară lui Frege de meditaţiile sale asupra unor enunţuri a „Luceafărul de ziuă este identic cu Luceafărul de seară" şi poate ă tocmai importanţa pe care o avea această distincţie în ochii săi -a făcut să introducă identitatea ca noţiune de bază.

în perioada cînd scria *Begriffsschrift,* Frege nu vedea necesitatea doptării unor măsuri speciale de precauţie pentru calculul extins 1 funcţiilor în care cuantorii se aplică la variabile funcţionale. Dar, înd îşi reformulează sistemul de logică în vederea obiectivelor urmă- ite în *Grundgesetze,* el adaugă o nouă axiomă de cuantificare, care 1 simbolismul modern poate fi redată prin formula:

(/)&(/) ° gA^hx)-*

.ccastă axiomă înseamnă, de fapt, că ceea ce este valabil pentru toa- ĩ funcţiile de nivel unu cu un singur argument este valabil pentru ricare dintre ele. Ca şi în scrierea lui Frege, se presupune că litera îică scrisă ca indice la litera funcţională *g* arată că orice argument decvat pentru paranteza ce urmează trebuie să fie o funcţie de nivel nu de un singur argument. Ea este un fel de prefix de legare, deşi a un cuantor. Evident, noua axiomă se aseamănă foarte mult cu sioma de cuantificare pentru variabilele individuale, şi anume

(*)A ^*fy.*

Dar în sistemul lui Frege această axiomă este unica autorizare explicită a aplicării cuantorilor la variabile funcţionale şi, ca atare, ea nu este cîtuşi de puţin superfluă. Fără această inovaţie ad-hoc, Frege nu ar fi putut nici măcar să facă plauzibilă ideea că aritmetica este reductibilă la

logică. Dacă ar fi considerat necesar să aplice cuantorii la variabilele funcţionale de nivelul doi şi de nivel mai înalt, el ar fi enunţat poate o axiomă separată de cuantificare pentru fiecare nivel succesiv în parte. Dar am văzut că el nu se simţea deloc la largul său cu formulele care presupuneau variabile funcţionalei de nivel mai înalt şi a încercat să-şi simplifice sarcina vorbind îr schimb despre clase şi despre clase de clase.

Este probabil că tocmai caracterul greoi al propriei sale notaţi l-a făcut pe Frege să repudieze formulele cu variabile funcţional* legate. Iar această notaţie s-a datorat la rîndul ei opoziţiei pe car< Frege se simţea obligat s-o releve între funcţii şi obiecte. Dar, oric< ani putea crede referitor la ideile generale ale lui Frege despre funcţii trebuie să admitem că utilizarea variabilelor funcţionale legate pre zintă un element nou şi bizar. Faptul devine evident cînd încercăn să găsim o traducere literală pentru formulele în care figurează ele

Deşi nu este uşor să găsim în limbajul obişnuit echivalenţe strict pentru formulele cu variabile individuale legate, această dificultat poate fi de obicei depăşită printr-o folosire judicioasă a termenulu ‚lucru" şi a diverselor pronume. Astfel, (3%) *[Fx.Gx]* poate fi redat ca şi cum ar fi o abreviere aproximativă a propoziţiei româneşti: *Exis tă ceva care este F şi este G.* Dar atunci cînd cuantorii se aplică la varia bile funcţionale, gramatica simbolismului se abate atît de mul de la gramatica limbajului obişnuit încît nu mai este posibil să dăi o traducere literală a formulei, adică o traducere în care fiecare sem să fie tradus printr-un cuvînt. De exemplu, cum vom citi (3/) *[fX.fY]* Cînd construiesc o formulă de acest fel, logicienii încearcă uneo să o redea oral, prin propoziţia destul de apropiată de limba obişnuită *Există un f astfel încît f este X şi f este* Y. Acest jargon mixt es1 evident lipsit de eleganţă, dar în afară de aceasta el este nesatisfăcăt< deoarece nu reuşeşte să arate limpede rolul lui *f.* în corpul formule litera este suficient de adecvată pentru marcarea unui spaţiu lib care ar putea fi completat printr-o expresie funcţională cum este t verb, dar în prefix litera este tratată ca şi cum ar fi ceea ce logicierl medievali numeau un termen general de intenţie secundă, echivalel poate cu „funcţie". Auzind mai întîi expresia „există un", ne aştel tăm în mod firesc să urmeze un substantiv comun, dar mai tîrzl constatăm că litera care a fost pusă să îndeplinească oficiul

de sul stantiv poate lua şi locul unui verb. Dificultăţi similare survin atuil cînd cuantorii se aplică la variabile propoziţionale. în fiecare cl
în parte, sursa dificultăţii rezidă în faptul că deşi limba noastră are cuvinte ca „oarecum" şi „oricum", ea nu conţine nici o construcţie care ar corespunde exact utilizării unui cuantor cu o *expresie* variabilă avînd statutul gramatical de verb sau de clauză completă. Dacă vrem să spunem într-o limbă naturală ceea ce în simbolismul logicii este spus prin formula (3/) *\JX.fY},* nu putem produce nimic mai apropiat decît *Există o însuşire exemplificată prin X şi prin Y.* Aceasta este într-adevăr o redare destul de apropiată, dar ea nu traduce semn cu semn prin cuvinte formula logică simbolică pînă cînd nu modificăm efectiv convenţiile noastre pentru utilizarea simbolismului, mai întîi prin luarea lui *f* în cadrul formulei ca un semn al unui spaţiu liber ce marchează un loc pentru o *desemnare* a unei funcţii, [iar apoi prin luarea ordinii semnelor într-o expresie compusă oarecare de forma *FX* ca însemnînd că *F* este exemplificat de *X.*

Frege nu considera posibil să vorbim despre o funcţie fără să păcătuim împotriva gramaticii, şi din acest motiv nu putea să trateze variabilele funcţionale ca pe niste semne care marcau locurile libere ce urmează să fie umplute de desemnări complete. După el, o funcţie era esenţialmente o entitate incompletă şi el considera inevitabil ca această particularitate să se reflecte în forma axiomei sau axiomelor speciale de cuantificare utilizate pentru calculul lărgit al funcţiilor. Dacă distingem minuţios între expresie şi desemnare, putem vorbi despre funcţii fără să ajungem la impasul lui Frege, dar noua interpretare a simbolismului logic, propusă în alineatul precedent, nu ne za scuti de necesitatea unei reguli sau axiome speciale atunci cînd ncepem să aplicăm cuantorii la variabile funcţionale. în calculul estrîns al funcţiilor, dispunem de reguli de raţionament pentru expre- ,ii de forma *(x)Fx* şi de forma *(Jx)Fx,* unde se presupune *că Fx* este > abreviere a unei expresii funcţionale care conţine *x;* dar dacă adop- :ăm convenţia că *FX* este o prescurtare pentru *F este exemplificat le X,* regulile noastre nu ne vor mai permite să operăm cu formule le acelaşi tip ca (x) *[Gx Hx]* şi fără îndoială nu vor fi suficiente pentru explicarea aplicării cuantorilor la variabile aflate în pozi- ia lui *F.* Şi totuşi, introducerea unor reguli separate de cuantificare pentru

diferitele genuri de variabile este nesatisfăcătoare, şi de aceea pare indicat să vedem dacă prin utilizarea unui nou simbolism nu ,m putea ajunge la o simplificare.

Una din căile de ieşire din impas constă în a face ca *FX* să-şi păs- reze sensul conferit de către Frege dar să introducem o nouă contantă funcţională v) avînd semnificaţia de „exemplifică". Intrucît **IOUI** simbol este un fel de verb tranzitiv, semnele care apar de cele ouă părţi ale sale în cadrul unei formule simple trebuie să fie nişte esemnări, iar înţelesul simbolului impune ca cel puţin al doilea semn să fie o desemnare a unei funcţii. Aşadar, ca variantă pentru *FX* avem *xnY,* unde Y este o prescurtare pentru *§xFx.* Uneori, ce-i drept, primul semn utilizat împreună cu vj poate desemna un şir ordonat de două sau mai multe lucruri, în timp ce al doilea semn desemnează o însuşire care nu poate fi exemplificată decît într-o atare secvenţă, dacă în genere poate fi exemplificată. Aceasta se va întîmpla ori de cîte ori este transcrisă în noua notaţie o propoziţie relaţională, în loc de *G(X,Y)* avem atunci **<A,Y>T;Z,** unde *Z* este o prescurtare pentru *§xyG(x,y).* în alte formule însă, ambele semne care însoţesc semnul v) pot fi desemnări de funcţii, anume atunci cînd despre funcţia însăşi se spune că exemplifică o anumită însuşire. Dar dacă una sau ambele desemnări care apar împreună cu 7) într-o formulă simplă sînt înlocuite printr-o variabilă, obţinem o expresie care poate servi ca matrice pentru enunţuri generale. Aşadar, matricile de forma *xyY* şi de forma Xr_ty vor fi în egală măsură deschise cuantificării în conformitate cu regulile obişnuite ale teoriei cuantificării, şi putem scrie de exemplu (3z) pentru exprimarea propoziţiei că există o însuşire pe care lucrurile denumite *X* şi Y o exemplifică, Mai mult, în afară de simplificarea pe care o permite în exprimarea propoziţiilor generale despre funcţii, noua notaţie are marele merit de a arăta clar că teoria numită uneori calculul lărgit al funcţiilor pro poziţionale este de fapt teoria exemplificării. Desigur, ar fi absurc să spunem că r) trebuie luat ca unica expresie funcţională a limbajului nostru şi că trebuie utilizat în formularea tuturor propoziţii-lor fără excepţie. într-adevăr, cînd vrem să prescriem un atribut determinat unui lucru numit *X,* nu avem, evident, nimic de cîşti- gat dacă scriem *Xtj^yFy* în loc de *FX*; şi apoi, în orice caz, posibilitatea desemnării unei funcţii presupune întotdeauna posibilitate; exprimării ei. Este însă important

faptul că acel calcul lărgit în care vorbim cu generalitate deplină despre funcţii poate fi prezentat c; un sistem cu un semn nou, ireductibil la semnele teoriei obişnuit; a cuantificării. Căci aceasta echivalează cu afirmaţia că el este teori; ideii exprimate prin acest semn.

Cînd discuta în germană probleme filosofice, Frege vorbea adese; despre căderea unui lucru sub un concept, dar din motive pe car le-am examinat mai sus el nu era satisfăcut de acest limbaj şi de acee nu a încercat niciodată să dezvolte un calcul al exemplificării d felul celui pe care l-am propus adineauri. Pe de altă parte, calcule apartenenţei la clase, prin care el încerca să evite dificultăţile proprie sale notaţii pentru aplicarea cuantorilor la variabilele funcţionale are o structură foarte asemănătoare cu aceea a calculului exemplif cării. Aşa cum *FX* poate fi redat prin *XrfiyFy,* tot astfel poate : redat şi prin *XeyFy,* unde e este o abreviere pentru „este un membr 1". Şi după cum raportarea unui lucru la un altul într-un anumit el poate fi privită ca exemplificarea unei însuşiri relaţionale de către in cuplu ordonat, tot astfel ea poate fi privită ca apartenenţa aceluiaşi uplu ordonat la o clasă de cupluri ordonate. în fapt, unica deosebire nsemnată dintre cele două calcule constă în condiţia de identitate >entru tipurile lor distinctive de entităţi. Atunci cînd a introdus în *',rundgesetze* o notaţie pentru clase, Frege a stipulat o axiomă (V) :are în simbolismul modern se poate reda prin formula

$$(xFx = yGy) = (z)[Fz = Gzy$$

Aceasta echivalează cu a spune că avem pentru clase

$$(X = Y) = (w)[wsX = weYJ.$$

?ropoziţia corespunzătoare nu este valabilă pentru însuşiri sau atri- >ute şi nici măcar nu ar fi corect să spunem în cazul lor

$$(X = Y) = \mathrm{L}\ (\mathrm{w})\ [wQX = w \hat{}\ Y].$$

într-adevăr, dacă din identitatea celor două însuşiri urmează că ;le trebuie să fie în mod necesar exemplificate de unele şi aceleaşi ucruri, reciproca nu este adevărată. Toate triunghiurile echilaterale iînt cu necesitate triunghiuri cu unghiuri egale, şi viceversa, dar iemnificaţia pe care o are „triunghi echilateral" nu este aceeaşi cu semnificaţia pe care o are „triunghi echiunghiular".

Din punct de vedere istoric este interesant faptul că

dezvoltarea ogicii matematice, care începuse prin tentativele lui Leibniz de a ormula un calcul *de continentibus et contentis,* a trebuit să culmi- leze în opera lui Frege, Whitehead şi Russell cu o teorie a apartenen- ei la clase. Dar nu trebuie să dăm prea multă importanţă similari- ăţilor terminologice. Leibniz nu făcea o distincţie clară între relaţia nui membru cu o clasă şi relaţia unei clase cu o clasă supraordonată, cărei parte este, dar în cea mai mare parte spusele sale erau adec- ate numai pentru cea de-a doua relaţie. Algebra claselor a lui Boole, e care o privim ca pe o realizare a proiectului lui Leibniz, este fără idoială o teorie a relaţiilor dintre clasele ai căror membri, în cazul înd au membri, provin toţi dintr-un domeniu comun de indivizi urnit universul discursului. în fapt, acest calcul este un fragment 1 calculului restrîns al funcţiilor propoziţionale. Pe de altă parte, ilculul lui Frege nu priveşte numai relaţiile de incluziune, excluziune intersectare între clase de acelaşi nivel, dar şi apartenenţa unei clase i o alta. Pe scurt, acest calcul este teoria cantoriană a mulţimilor rezentată ca un produs derivat din calculul lărgit al funcţiilor pro- oziţionale. Chiar dacă aplicarea cuantorilor la variabile funcţionale u l- ar fi preocupat, Frege ar fi dorit probabil să vorbească despre clase din acelaşi motiv din care Cantor a fost împins să vorbeasc despre mulţimi. Pentru aducerea la îndeplinire a programului să este necesar să arătăm: (a) că aritmetica poate fi elaborată în cadrv teoriei mulţimilor, şi (&) că teoria mulţimilor poate fi caracterizat în mod adecvat ca o parte a logicii. Vom analiza în capitolele urmă toare dacă aceste afirmaţii pot fi dovedite. Aici nu trebuie să considt răm decît ceea ce implică referirea la clase sau mulţimi, şi nu referi rea la funcţii.

Deşi Frege privea enunţurile despre clase ca înlocuitoare, în anumit contexte, ale enunţurilor despre funcţii, el nu credea că este cu puţin ţă ca clasele şi funcţiile să coincidă. Potrivit explicaţiilor sale, enunţuri le despre clase pot fi substituite enunţurilor despre funcţii numî cînd acestea din urmă sînt de aşa natură încît ar fi adevărate pentr toate funcţiile echivalente material celor considerate. Această ide era împărtăşită de Whitehead şi Russell pe vremea cînd elabora prima ediţie din *Principia Mathematica.* Dar în noua introducere scrisă pentru ediţia a doua a acestei opere,

Russell declara că nu ms vedea necesar să distingă între clase şi funcţii, deoarece consider că toate funcţiile sînt extensionale, adică accepta orice aserţiun de forma

$$(x)[Fx = Gx] \underset{A}{=>} [\underset{A}{H}(Fx) = H(Gx)]$$

unde, conform convenţiei sale, *Fx* şi *Gx* sînt desemnări de funcţii§§§

contrar, toate anunţurile adevărate cu privire la apartenenţa la clase ar fi tautologice. în epoca modernă, logicienii care preferă să vorbească despre dase şi nu despre funcţii fac aceasta în scopul ocolirii problemelor ie intensionalitate, iar uneori ei afirmă chiar că clasele despre care /orbesc *sînt universalii.*

în această ordine de idei, este interesant să notăm că logicienii rare sînt de acord în ce priveşte preferabilitatea notaţiei în termeni le clase, pot totuşi să fie într-un dezacord tot atît de mare ca dezacor- lul filosofilor din trecut în legătură cu universaliile. După Quine, ealismul, conceptualismul şi nominalismul se pot găsi toate în operele utorilor moderni cu privire la fundamentele matematicii[21]. Prin realism" el înţelege, după cum se pare, dorinţa de a admite existen- a claselor şi a claselor de clase ori de cîte ori simbolismul nostru ne ugerează posibilitatea unor atare ipoteze: prin „conceptualism" în- elege o politică de admitere a existenţei claselor numai cînd sîntem 1 măsură să stabilim alcătuirea acestora, iar prin „nominalism" îcercarea de a ne dispensa de orice ipoteză cu privire la existenţa laşelor. în practică, se presupune că cele trei atitudini au mai multă iu mai puţină bunăvoinţă în ce priveşte cuantificarea variabilelor e clasă. Este îndoielnic dacă această întrebuinţare a vechilor eti- îete poate fi bună la ceva, în special dacă (aşa cum se întîmplă ade- ■a) realismul este identificat greşit cu platonismul. Dar faptul că uine şi alţi autori se simt înclinaţi să vorbească astfel arată foarte npede că ei nu consideră posibil să rezolve toate problemele legate ; universalii prin simpla adoptare a unei notaţii pentru clase. Iar această privinţă, desigur, au dreptate.

Cînd într-un aşa-zis calcul funcţional de ordin superior cuantorii aplică la variabile care marchează locurile destinate semnelor ********** †† funcţionale, noutatea esenţială a sistemului rezultat poate fi trecută cu vederea deoarece nu s-a introdus nici un simbol nou. Pe de altă parte, dacă prezentăm în mod explicit sistemul ca o teorie a exemplificării sau apartenenţei, am putea cumva să trecem cu vederea faptul că acum sînt presupuse sorturi diferite de entităţi fundamentale în calitate de valori posibile pentru

---

********** • *Mathematical Logic,* § 22.

†† *From a Logical Point of View,* pp. 127—129.

variabilele logicii generale subiacente sau ale teoriei cuantificării. în această ordine de idei, Hao Wang scria :

„Opoziţia dintre teoriile cuantificării unisortate şi multisortate este mai radicală decît cea dintre calculele predicatelor de ordin unu şi de ordine mai înalte. Deşi calculele de ordin mai înalt şi teoriile formulate în interiorul lor sînt sisteme multisortate, există teorii multisortate, cum ar fi geometria, care lucrează cu puncte, drepte şi plane, cart nu sînt formulate în calcule de ordin mai înalt. Teoriile cuantificării multisortate tratează toate predicatele pe picior egal, pe cînd calculele de ordin superior rezervă un piedes tal special pentru relaţia de apartenenţă. într-adevăr, un calcul al predicatelor de al *n-le:* ordin nu este nimic altceva decît o teorie n-sortată care conţine o singură axiomă (axiom; comprehensiunii), ce afirmă că orice formulă cu sens din sistem defineşte o mulţime.”’

O teorie este multisortată atunci cînd are variabile de genuri dife rite, fiecare gen de variabile fiind restrîns la un domeniu diferit de obiecte ca valori posibile. Diferenţele de gen dintre variabile pot f indicate tipografic, dar aceasta nu este esenţial, căci contextul poat(indica în măsură suficientă aceste diferenţe. Dacă într-o versiuni a geometriei plane întîlnim expresia *x este situat pe y,* ştim că liter: *x* marchează un loc pentru desemnările de puncte iar litera *y* un lo pentru desemnările de linii. Dacă însă teoria este într-adevăr multişor tată, trebuie să asumăm că regulile de cuantificare se repetă pentr fiecare gen de variabile în parte. Fără îndoială, aceste reguli vo coincide exact ca formă pentru fiecare gen. Dar cerinţa ca ele să fi repetate este enervantă, şi este firesc să ne întrebăm dacă nu puter duce la îndeplinire ceea ce urmărim cu o logică generală unisortată în care regulile de cuantificare sînt formulate numai o singură dat;

Răspunsul pare a fi că putem transcrie orice teorie multisortat într-o variantă unisortată standard, cu condiţia ca variabilele noasti să poată lua ca domeniu de valori suma tuturor categoriilor teorii considerate şi cu condiţia ca să reintroducem apoi distincţia dup categorii prin intermediul unui număr de predicate categoriale (<■ ex., „este un număr natural”, „este un punct”, „este o linie”) cl care putem formula condiţii pentru teoremele sistemului. Astfel, ■ loc de a spune : I

$$^{x}\{y +^{z}) = {}^{x}y + {}^{xz}> \qquad /$$

*’ "On Denumerable Bases of Formal Systems", *Mathemaitcal Inierpretation of mal Systems* de Th. Skolem şi alţii, (1955), p. 76. Termenul „multisortat” a fost intiM dus de către A. Schmidt, „Uber

deduktive Theorien mit Mehreren Sorten von Grunddfl gen", *Mathematische Annalen,* CXV (1938), pp. 485 — 506. H

unde se subînţelege că variabilele au ca domeniu de valori numai categoria numerelor naturale, spunem:

Dacă x,y,z sînt numere naturale, x(y z) = xy + xz.

Această standardizare (cum este numită uneori) este o procedură la care recurgem fără nici o ezitare în vorbirea obişnuită şi se pare că este infailibilă. Este interesant de asemenea să notăm că, în numeroase cazuri, cel puţin transcrierea unei teorii multisortate într-un limbaj unisortat standard poate fi efectuată fără adăugarea vreunui predicat nou categorial. în aceste cazuri, distincţia după categorii poate fi făcută prin formularea condiţiilor categoriale cu ajutorul simbolurilor aflate dinainte la dispoziţia noastră‡‡‡

5. *Necesitate şi limbaj*

Deşi Frege avea multe de spus despre principiile sintaxei şi s-a considerat întotdeauna pe el însuşi drept creatorul unui nou limbaj, care ir fi deosebit de adecvat pentru scopurile ştiinţei, spre deosebire de predecesorii săi el nu privea logica drept o *ars sermocinalis* şi, fără îndoială, nu împărtăşea ideea lui Hobbes şi Berkeley că necesitatea logică este impusă de regulile umane de utilizare a cuvintelor. Dimpotrivă, atunci cînd a spus că aritmetica s-ar putea reduce la logică, a subliniat că nu înţelegea s-o trateze nici ca pe o ramură a psihologiei şi nici ca pe o ramură a filologiei. Pentru el, logica era cea mai generală dintre toate ştiinţele despre realitate, era acea *doctrina formaruni* despre care scrisese Leibniz, şi ea era legată de gramatică numai întrucît studia schemele de bază pe care orice limbaj natural trebuie să fie apt a le exprima. Aceasta a fost şi doctrina lui Whitehead şi Russell în perioada cînd a fost elaborată *Principia Mathematica.* Dar, mai recent, mai mulţi filosofi au adoptat teoria convenţionalistă asupra necesităţii iar logica este chiar tratată de unii ca şi cum ar fi identică cu semantica, adică cu studiul acelor reguli sau uzanţe lingvistice care conferă cuvintelor semnificaţia lor. Schimbarea pare să dateze de la publicarea de către Ludwig Wittgenstein, în 1921, a operei sale *Tractatus Logico-Philosophicus,* deşi este aproape sigur că iniţial Wittgenstein nu urmărea nimic de acest gen.

în anii de dinainte de 1914, pe cînd studia la Cambridge cu Russell, Wittgenstein a remarcat că adevărurile logicii nu puteau fi definite satisfăcător ca fiind acele adevăruri care sînt exprimabile într-un anumit vocabular special, dar puteau fi deosebite de alte adevăruri printr-o însuşire specială a lor, pe care el a numit-o tautologie, înţelc- gînd prin aceasta nu caracterul lor repetitiv, ci mai curînd vacuitatea lor. I,a această propunere Russell s-a referit într-o operă scrisă pe cînd executa o condamnare la închisoare pentru activităţile sale pacifiste :

„Putem lua axioma infinitului ca un exemplu de propoziţie care, deşi poate fi enunţată în termeni logici, nu poate fi asertată de logică drept adevărată. Toate propoziţiile logicii au o caracteristică exprimată în mod obişnuit prin afirmaţia că ele ar fi analitice, sau că contradictoriile lor ar fi autocontradictorii. Acest mod de formulare nu este însă satisfăcător. Legea contradicţiei este doar una dintre propoziţiile logice ; ea nu are < preeminenţă specială; demonstraţia faptului că contradictoria unei propoziţii se contra zice pe sine însăşi reclamă, probabil, pe lingă legea

contradicţiei alte principii de deducţie Cu toate acestea, caracteristica propoziţiilor logice pe care o căutăm este cea care . fost intuită şi a cărei definiţie s-a căutat de către cei ce spuneau că ea consta în deductibilitate din legea contradicţiei. Această caracteristică, pe care o putem numi pentn moment tautologie, nu aparţine, evident, afirmaţiei că numărul indivizilor în univers est. *n,* oricare ar fi acest număr *n .. .* Propoziţiile logice sînt de aşa natură incit pot f cunoscute *a priori* fără a studia lumea actuală. . . . Aceasta este o caracteristică nu , propoziţiilor logice în sine, ci a modului în care le cunoaştem. Dar ea are repercuşiun asupra chestiunii naturii lor posibile, întrucît există anumite genuri de propoziţii despr care ar fi foarte greu să presupunem că le-am putea cunoaşte în absenţa experienţei Este clar că şi definiţia «logicii * trebuie căutată prin încercarea de a da o nouă definiţi a vechii noţiuni de propoziţie «analitică*. Deşi nu mai putem fi satisfăcuţi cu defini rea propoziţiilor logice ca propoziţii ce rezultă din legea contradicţiei, putem şi trebui încă să admitem că ele constituie o clasă cu totul deosebită de propoziţii în comparaţi cu cele pe care reuşim să le cunoaştem în mod empiric. Ele toate au caracteristica pe care, puţin mai sus, am convenit s-o numim «tautologie». Aceasta, împreună cu faptul că ele pot fi exprimate integral în termeni de variabile şi constante logice (o constantă logică fiind ceva ce rămîne constant într-o propoziţie atunci cînd *toate* elementele componente ale acesteia sînt modificate) — va da definiţia logicii sau matematicii pure. Pentru moment, nu ştiu cum trebuie definită tautologia. (Importanţa «tautologiei» pentru o definiţie a matematicii mi-a fost arătată de fostul meu elev Ludwig Wittgens- tein, care lucra asupra acestei probleme. Nu ştiu dacă el a rezolvat problema şi nici măcar dacă trăieşte sau nu)”§§§

clarificat I — după cum se presupunea — prin metoda matricială de expunere (metoda tabelelor de adevăr) şi se considera că nu are mare importanţă faptul că condiţiile de adevăr ale aserţiunilor universale şi existenţiale nu puteau fi prezentate în tabele avînd un grad finit de complexitate. Accentul pe care îl pune Wittgenstein asupra definiţiilor sale pentru funcţiile de adevăr prin intermediul tabelelor de adevăr se datora, desigur, convingerii sale că logica nu opera cu o clasă specială de lucruri sau relaţii ale lumii, ci numai cu natura a ceea ce am putea numi cumva complexitatea logică. într-un loc, el scrie:

„Operaţia de adevăr este felul în care o funcţie de adevăr apare din propoziţiile ele- uentare. . . Fiecare propoziţie este rezultatul operaţiilor de adevăr asupra unor propoziţii lementare. . . Toate funcţiile de adevăr sînt rezultate ale aplicărilor succesive ale unui mmăr finit de operaţii de adevăr la propoziţiile elementare. Aici devine clar că nu există ieruri cum ar fi «obiectele logice » sau «constantele logice > (în sensul lui Frege şi Rus- îll)”[24].

)ar Wittgenstein nu se mulţumea să spună că adevărurile logicii înt tautologii. El susţinea totodată că tautologiile logicii erau singtt- rele adevăruri necesare şi că ele constituiau întregul imperiu al cunoaş# terii apriorice :

„Din existenţa sau non-existenţa unei stări de lucruri *(Sachverhalt,* adică fapt atotnar posibil) nu putem deduce existenţa sau non-existenţa altora. Stările de lucruri sînt independente între ele”††.

„Cercetarea logică înseamnă investigarea *tuturor regularităţilor.* Iar în afara logicii totul este accident . . . Necesitatea ca ceva să se întîmple deoarece s-a întîmplat altceva nu există. Există numai necesitate *logică.* La baza întregii concepţii moderne despre lume stă iluzia că aşa-numitele legi ale naturii ar fi explicaţii ale fenomenelor naturale"‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡.

Rezultatul este ceva în genul filoso[f]iei lui Hume, şi nu este surprinzător faptul că în cei doisprezece ani care au urmat publicării *Tratatului,* pozitiviştii logici din Cercul de la Viena, condus de Moritz Schlick, au încercat să combine explicaţia wittgensteiniană a logicii cu tradiţia humeistă pe care o moşteniseră de la Ernst Mach. Dar între cele două sisteme filosofice există o deosebire importantă. în timp ce Hume încerca să-şi sprijine concluziile pe o analiză psihologică, Witt- genstein se mărginea în cea mai mare parte la declaraţii oraculare, fără argumente în sprijinul acestora, cu excepţia acelora ce puteau fi derivate din considerarea

---

†† *Ibid.,* 2.061-2.062.
‡‡ *Ibid.,* 6.3, 6.37, 6.371.

simbolismului din *Principia Mathematica.* Explicaţia pare să fie faptul că el a admis pur şi simplu în mod indiscutabil suficienţa acestui simbolism în calitate de aparat sintactic al unui limbaj ideal. Am observat deja că el refuza să recunoască] posibilitatea unui limbaj în mod ireductibil intensional, care ar permite desemnarea propoziţiilor în contexte ca „Ion crede că Pământul este turtit". Cînd spune că logica este un ansamblu de tautologii şi refuză să acorde vreo importanţă regulilor de inferenţă de felul celor pe care Frege, Whitehead şi Russell consideraseră necesar să le adauge propoziţiilor lor primitive§§§

zisele *sensibilia.* Aceasta era şi presupunerea lui Russell în prelegerile sale din 1918 asupra *Filozofiei atomismului logic*[33] şi într-un număr de scrieri ulterioare. Dar Wittgenstein însuşi nu s-a angajat pe acest drum, el considerînd, probabil, că problema trebuie soluţionată empiric şi că deci într-un fel ea era sub demnitatea operei saie :

„Este clar că avem un concept al propoziţiei elementare separat de forma ei logică specială. Acolo unde însă putem construi simboluri conform unui sistem, acolo acest sistem este lucrul important din punct de vedere logic şi nu simbolurile izolate . . . Dacă cunoaştem pe temeiuri pur logice că trebuie să existe propoziţii elementare, atunci acest lucru trebuie cunoscut de orice om care înţelege propoziţiile în forma lor neanalizată . . . *Aplicarea* logicii este cea care decide ce propoziţii elementare există. Logica nu se poate intersecta cu aplicarea ei . . . Dacă nu pot indica *a priori* propoziţii elementare, atunci încercarea de a le indica trebuie să ducă la un nonsens vădit"‡‡‡

descrie ca aflat în afara acestui din urmă loc"".

Luată în serios, afirmaţia implică faptul că posibilitatea folosirii unei particule negative depinde în măsură însemnată de incompatibilitatea obiectivă a diverselor stări de lucruri imaginabile. într-adevăr, deosebirea sau excluderea despre care vorbeşte aici Wittgenstein este presupusă de construcţia enunţurilor negative şi deci trebuie să fie o relaţie independentă de folosirea pe care o dăm unui semn negativ, deşi în altă parte el admite că o atare incompatibilitate nu poate să existe. Poate că folosirea vagă a cuvîntului „logic" l-a împiedicat pe Wittgenstein să vadă această inconsistenţă a sistemului său. Cînd el spune că nu există necesitate în afară de cea a logicii, pare să înţeleagă prin „logică" teoria folosirii pe care o dăm semnelor; dar cînd vorbeşte despre logica lumii şi cînd în particular se referă la poziţii în spaţiul logic, el pare să înţeleagă ceva ce ar putea fi numit mai adecvat metafizică. Dacă, aşa cum sugerează cuvintele sale, există un sistem de alternative în care noi selectăm obiecte în vederea afirmării sau negării ori de cîte ori emitem enunţuri factuale contingente, structura acelui sistem trebuie să cuprindă, fără îndoială, toate principiile de imposibilitate şi necesitate care pot fi formulate, dar studiul sistemului nu va constitui acea ştiinţă formală restrînsă pe care Frege o numea logică.

Se pare că Wittgenstein era uneori preocupat de neînţelegerile în jurul doctrinei sale asupra necesităţii logice. Spre sfîrşitul *Tratatului* său, el s-a explicat mai pe larg decît obişnuia:

„Aşa cum există numai o necesitate *logică,* tot aşa există numai o imposibilitate *logică.* Căci este imposibil ca două culori, de exemplu, să fie într-un acelaşi loc în cîjnpul vizual, adică este logic imposibil deoarece aceasta este exclus de structura logică a culorii. Să considerăm cum se prezintă în fizică această contradicţie. Se prezintă cam îri felul următor: o particulă nu poate avea în acelaşi timp două viteze, adică nu poate fi în acelaşi moment în două locuri, adică particulele din locuri diferite la acelaşi moment nu pot fi identice. (Este limpede că produsul logic a două propoziţii elementare nu poate fi nici tautologie, nici contradicţie. Afirmaţia că un punct din cîmpul vizual are două culori diferite în unul şi acelaşi moment constituie o contradicţie)"‡‡‡

exclude unele pe altele”§§§

desconsi- derînd în mod nefiresc şi derutant aplicaţia ei, el a susţinut acolo ceea ce s-ar putea numi o concepţie absolutistă a adevărurilor logice. Cu alte cuvinte, el vorbea ca şi cum nu exista, şi nu putea să 'existe, decît un singur sistem de logică, şi anume o versiune simplificată a ;i sternul ui prezentat în *Principia Mathematica.* Dar în rîndul unora lintre cei ce s-ar putea numi adepţii săi, accentul pe care îl punea asupra mportanţei convenţiilor simbolice a dus curînd la considerarea cu simpatie a posibilităţii unor logici alternative, ca cele propuse de către Post, Lukasiewicz şi Heyting. Astfel, îl găsim pe Carnap scriind în 1934:

„în logică nu există nici un fel de morală. Fiecare este liber să-şi construiască propria sa logică, adică propria sa formă de limbaj, aşa cum doreşte. Dacă vrea să o discute, tot ce i se cere este să formuleze clar metodele sale şi să dea reguli sintactice şi nu argumente filosofice. Atitudinea tolerantă pe care o sugerăm aici este, în măsura în care este vorba de calcule matematice speciale, atitudinea împărtăşită tacit de majoritatea matematicienilor"‡‡‡

împreună cu acestea, noi considerăm ca garantate principiile logice corespunzătoare; iar cînd ne-am îndeplinit sarcina, nu numim noul sistem o logică în sensul obişnuit dacă acest sistem nu reproduce unele principii pe care le admitem în prealabil§§§

se susţine de multe ori că emiterea unei formule tautologice este informativă dacă şi numai dacă este luată ca o prescurtare a unei observaţiii despre un limbaj, şi anume i unei observaţii în sensul că regulile limbajului în care ea este formulată sînt de aşa natură îneît o fac tautologică.

Orice simplificare filosofică ce ajunge la o popularitate atît de largă :a cea a doctrinei de mai sus trebuie să conţină un adevăr important, idică un adevăr care se cere subliniat în acel moment; în cazul de aţă, este uşor de văzut care este acest adevăr. Orice ajungem să cunoaş- em aprioric constituie un adevăr de ordin doi despre relaţiile înlre iropoziţii sau constituie un truism derivat dintr-un asemenea ade- 'ăr; şi într-un caz şi în altul, acest adevăr de ordin doi este învăţat rin reflectare asupra semnificaţiei cuvintelor sau altor simboluri. In animal, bunăoară un cîine, poate cunoaşte eventual — am putea pune — un fapt contingent , de pildă că pe un cîmp se află două oi, ar pare absurd să spunem că un cîine ar putea cunoaşte chiar şi un devăr atît de simplu al aritmeticii cum este propoziţia că 2 + 2 = 4 ; ir motivul nu poate fi acela că toate vieţuitoarele care nu sînt oameni r fi lipsite de acel gen special de intuiţie care, potrivit lui Kant, ne ?rmite să aflăm adevărurile aritmeticii. Numeroase explicaţii eronate ale cunoaşterii apriorice au fost inspirate de ideea platoniciană a contemplaţiei (Oecdpia) ca un fel de supraveghere intelectuală în care sufletul poate afla fapte cu privire la obiecte suprasensibile; dacă vrem să ne eliberăm de influenţa acestor explicaţii greşite, este fără îndoială important să ne dăm seama de legătura dintre cunoştinţele apriorice şi folosirea simbolurilor. Dar convenţionalismul simplificator al secolului douăzeci a produs alte rezultate, care nu constituie cîtuşi de puţin perfecţionări ale aparatului nostru intelectual. în special, el a dus la estomparea a două distincţii importante.

în primul rînd, adepţii acestei concepţii admit că termenii „analitic", „aprioric" şi „necesar" împrumutaţi din logică, respectiv din teoria cunoaşterii şi din metafizică, sînt coextensivi. Fără îndoială, orice propoziţie analitică adevărată poate fi cunoscută *a priori* şi orice propoziţie care poate fi cunoscută *a priori* este necesară. Dar nu este deloc evident că au loc şi reciprocele. Dacă înţelegem „analitic" în sensul lui Frege, s-ar putea să existe adevăruri cunoscute *a priori* care nu sînt analitice, deoarece nu decurg din legile logicii formale nici chiar atunci cînd se admit în calitate de

noi reguli de transformare anumite definiţii explicite. Un exemplu mult discutat este propoziţia că nimic nu poate fi în acelaşi timp şi roşu şi verde. Un alt exemplu este propoziţia că relaţia de anterioritate temporală este tranzitivă dar ireflexivă. Mai mult, chiar dacă sîntem siguri că anumite însuşiri şi relaţii perceptibile oferă un model ce satisface postulatele unei geometrii abstracte, acest model trebuie să fie şi el o mostră de cunoaştere apriorică, dar nu analitică. Nu putem arăta în acelaşi mod că existăJ adevăruri necesare (adică adevăruri care nu admit alternativă) ce *nu pot* fi cunoscute *a priori*; într-adevăr, producerea unui exemplu ar presupune în mod clar revendicarea unei cunoştinţe apriorice. Nt putem însă cel puţin imagina că există asemenea adevăruri. De regulă admitem că există adevăruri ale matematicii pe care în fapt nimen nu le cunoaşte, şi nu pare absurd să emitem sugestia că ar putea exist: adevăruri necesare cu privire la calităţi sau relaţii nepercepute şi pi care nimeni nu le poate cunoaşte vreodată deoarece (aşa cum ar pute: spune Locke) nimeni nu posedă ideile cuvenite.

Situaţia este şi mai rea atunci cînd, aşa cum se întîmplă uneor se presupune că cei trei termeni „analitic", „aprioric" şi „necesar sînt nu numai coextensivi, ci şi sinonimi, astfel încît oricare din (poate fi şi un contradictoriu al oricăruia dintre cei trei termei corespunzători „sintetic", „empiric" şi „contingent". Ca exempl putem lua *definiţia* lui A. J. Ayer pentru propoziţiile (adică în accej ţia sa, enunţurile) analitice şi sintetice: „O propoziţie este analitit dacă validitatea ei depinde numai de definiţiile simbolurilor pe ca: le conţine, şi este sintetică dacă validitatea ei este determinată pr:

faptele de experienţă”**********. Este evident că o asemenea confuzie face ca noţiunea kantiană de adevăr sintetic *a priori* să pară absolut absurdă, deşi această noţiune a fost acceptată în epoca noastră de matematicieni de talia lui Frege, Poincard, Brouwer şi Hilbert. într-adevăr, s-a emis ideea că expresia „sintetic a *priori”* nu este nimic mai mult decît un substitut mistificator pentru „necesar contingent”††††††

Dacă se obiectează că echivalarea dintre „necesar” şi „convenţional” are ceva paradoxal în ea, ei răspund că, aplicat la in adevăr, cuvîntul „necesar” nu exprimă mai mult decît hotărîrea 'orbitorului de a menţine o anumită formă verbală în toate circumstan- ele. Nu avem, spun ei, nici o alternativă la un adevăr necesar *in cadrul imbajului vorbitorului,* dar numai pentru că el însuşi şi-a limitat astfel imbajul său. Susţinînd în plus că (aşa cum spunea Wittgenstein) rice necesitate este necesitate logică, ei ajung în mod natural la afir-

maţia că enunţurile logice sînt enunţuri lingvistice de un anumit fel, şi anume enunţuri despre inconsistenţa lingvistică (sau relaţii defi- nibile prin referire la această inconsistenţă lingvistică) traductibile integral dintr-un limbaj într-altul[48]. Condiţia privitoare la traducere este pusă în întâmpinarea obiecţiei că logica nu este presupusă de obicei a trata un anumit limbaj special. După P. F. Strawson:

„Important este să se observe că atunci cînd delimităm aplicabilitatea cuvintelor într-un anumit limbaj şi legăm apoi cuvintele din acel limbaj de cuvintele altui limbaj prin intermediul regulilor de traducere, nu este nevoie să delimităm din nou aplicabilitatea pentru al doilea limbaj. Delimitarea este deja trasată. Din această cauză (sau parţial din această cauză), enunţurile logice încadrate într-un anumit limbaj nu sînt numai cu privire la acel limbaj”‡‡‡

orice limba în care putem găsi echivalente exacte ale celor patru cuvinte din englez trebuie să conţină sunete supuse unor reguli asemănătoare celor vala bile în engleză pentru „red", „yellow", „green" şi „blue". Dar nu est nici accident istoric şi nici truism (cel puţin în sensul peiorativ al cuvîr tului) faptul că există un domeniu de nuanţe distincte care pot divizate aşa cum le divizăm noi prin utilizarea cuvintelor noastre pentru culori. Cel ce acceptă convenţionalismul ignoră acest lucru, şi astfel ajunge în practică la concepţia că cuvintele generale sînt simple denumiri cu denotaţii multiple. John Stuart Mill a detectat această eroare în opera lui Hobbes şi a construit teoria sa asupra conotării în scopul remedierii sale; dar, aşa cum se întîmplă adesea în istoria filosofiei, eroarea a apărut într-o nouă travestire. în loc de a spune „Lumea este compusă din indivizi: universaliile ţin de limbaj", convenţionaliştii moderni spun „Lumea este compusă din fapte: necesităţile ţin de limbaj".

Dacă am argumentat corect, prima erezie este implicată în cea de a doua. Dar, în afară de aceasta, este interesant să notăm că a doua erezie poate fi respinsă direct prin considerente în genul celor despre care se admite în mod general că sînt fatale primei erezii. După cum indivizii sînt în esenţă corelativi la universalii şi ca atare sînt de neconceput luaţi în sine, tot astfel faptele, care sînt contingente în sensul că ţin de domeniile unor alternative posibile, sînt în esenţă corelative cu legile de necesitate sau imposibilitate şi ca atare sînt de neconceput 'ără aceste legi. Argumentul presupune o idee de posibilitate pe care convenţionaliştii o ignoră, dar chiar în cadrul propriilor lor presupuneri >e poate argumenta că, dacă propoziţiile necesare sînt necesare prin convenţie, atunci propoziţiile contingente sînt şi ele contingente, idică nenecesare, prin convenţie. Această consecinţă este inacceptabilă entru convenţionalişti — afară doar dacă ei nu o iau ca o versiune tezei adevărate în mod banal, după care convenţia determină ce arme verbale vor exprima propoziţii contingente, iar în acest caz onvenţionaliştii sînt obligaţi să interpreteze şi antecedentul într-un iod la fel de benign. într-adevăr, dacă înlăturăm intrepretarea banală, mcluzia trebuie să însemne că faptele din care este compusă lumea u sînt nici necesare, nici contingente în ele însele. Vom vedea mai tîr- u că unii filosofi au susţinut o asemenea concepţie, dar ei nu se inti- îlează convenţionalişti şi au fost atacaţi de cei ce acceptă acest

titlu. Ideile lui Wittgenstein au avut în rîndul filosofilor o mai mare fluenţă decît în rîndul logicienilor matematicieni. Astfel, în 1936 arski scria : „Conceptul de *tautologie* (adică de enunţ care «nu spune Bmic despre realitate »), • • • mie mi se pare a fi destul de vag. Dar ■ • • Bjucat un rol capital în cadrul discuţiilor filosofice iniţiate de L. Wittge- Ktein şi de tot Cercul de la Viena”[47]. Cu puţin timp înainte, Godel ********** arătase (într-o demonstraţie la care vom avea prilejul să ne referim ceva mai încolo) că’noţiunea obişnuită de consecinţă nu coincide cu noţiunea de deductibilitate formală. Avînd în vedere această nouă descoperire, Tarski scria :

„în cadrul oricărei teorii deductive (cu excepţia unor teorii extrem de elementare), oricît de mult am completa regulile obişnuite de inferenţă cu noi reguli pur structurale, se pot construi propoziţii care decurg în accepţia obişnuită a cuvîntului din teoremele teoriei, fără a fi însă demonstrabile în cadrul teoriei pe baza regulilor de inferenţă admise

Pentru a obţine noţiunea adecvată de consecinţă, intim legată de noţiunea obişnuită va trebui să apelăm la metode cu totul diferite şi să aplicăm un aparat conceptual ci totul diferit în definirea noţiunii”†††††††

numai dacă ori model al clasei K este totodată un model al propoziţiei X"ie.

Ceva mai încolo, el adaugă:

„Putem conveni să numim *contradictorie* o clasă de propoziţii în cazul cînd aceas clasă nu posedă nici un model. în mod analog, o clasă de propoziţii poate fi denumi *analitică* atunci cînd orice şir de obiecte constituie un model al ei. Ambele concepte pot raportate nu numai la clase de propoziţii, ci şi la propoziţii disparate ... De asemeni putem arăta ... că sînt analitice acele şi numai acele propoziţii care decurg din ori clasă de propoziţii (în speţă, din clasa vidă), iar contradictorii sînt acele şi numai ac, propoziţii din care decurge orice propoziţie"§§§

semantică, adică în ştiinţa în care considerăm rela- :iile semnelor faţă de lucruri şi ale lucrurilor faţă de semne. Spunem :ă Ion şi Petru satisfac condiţia „*x* şi *y* sînt fraţi" dacă şi numai dacă on şi Petru sînt în fapt fraţi. Or, de aici rezultă că definiţia consecin- ei logice la Tarski implică o referire la ceea ce are loc în lume. Astfel, •a să considerăm numai cel mai simplu exemplu cu putinţă, în teoria a orice propoziţie analitică (ce decurge dintr-o clasă oarecare de iropoziţii) prezintă particularitatea că toate exemplarele de forma sa sînt în fapt enunţuri adevărate. Fără îndoială, această caracteristică parţine oricărei propoziţii analitice, dar filosofii ar putea fi surprinşi e faptul că această caracteristică trebuie tratată ca definitorie în loc e a fi tratată, dimpotrivă, ca o proprietate rezultantă.

în al treilea rînd, deşi Tarski ia ca noţiune centrală, în analiza conse- inţei, noţiunea de formă logică, la fel ca Bolzano înaintea lui, el nu ste capabil să o definească precis, şi de aceea conchide:

„în întreaga noastră discuţie, un rol fundamental îl joacă împărţirea tuturor termenl- r în termeni logici şi extralogici. Această împărţire nu este desigur'arbitrară. Dacă, : pildă, noi am include printre seninele extralogice seninul implicaţiei sau cuantorul liversal, definiţia dată noţiunii de consecinţă ar duce la rezultate care contrazic flagrant •cepţia obişnuită a termenului. Pe de altă parte, nu cunosc temeiuri obiective care ne-ar •rmite să tragem o linie de demarcaţie rigidă între cele două grupe de termeni. Cred că se pot include în rindul termenilor logici «numiţi termeni pe care logicienii îi consideră de obicei ca termeni extralogici, şi aceasta fără consecinţe care ar contrazice acut uzanţele statornicite. în cazul extrem, am putea considera toţi termenii limbii ca termeni logici. Noţiunea de consecinţă *formală* ar coincide în acest caz cu noţiunea de consecinţă *materială''*[*].

Putem adăuga că în acest din urmă caz extrem conceptul de analitic ar coincide cu cel de adevărat.

S-ar putea ca cele trei dificultăţi de care ne izbim să fie interconectate. Atîta timp cît nu ne preocupă recunoaşterea semnelor logice, se pare că condiţia lui Tarski pentru valabilitatea relaţiei de consecinţă este suficientă, întrucît este evident că ea nu admite nimic ce nu s-ar numi în mod uzual un caz de consecinţă logică. Dar chiar şi în acest stadiu al reflecţiei noastre, condiţia nu pare necesară, deoarece exclude acele cazuri de consecinţă care depind de conexiune prin definiţie Dacă însă, aşa cum considerăm îndeobşte, o definiţie este o stipula re a faptului că anumite expresii trebuie privite drept consecinţe ah anumitor alte expresii, defectul nu este surprinzător. într-adevăr pentru a defini relaţia de consecinţă astfel îneît să asigurăm conexiun prin

definiţie ar fi necesar să spunem, printre altele, că o propoziţie ar fi o consecinţă a unei anumite alte propoziţii dacă există o stipulare sau o regulă de limbaj după care orice propoziţie de forma exemplifi cată de propoziţia dată ar urma să fie considerată ca o consecinţe a propoziţiei corespunzătoare de forma ilustrată de cealaltă propoziţie Această măsură nu ar fi mai circulară decît măsura legală că, avîn< în vedere un anumit act al Parlamentului, este magazin orice instituţi care face parte dintr-o clasă de instituţii pentru care ministerul d resort a dat un certificat că ele trebuie considerate magazine. Da aceasta s-ar îndepărta mult de explicaţia consecinţei la Tarski, căc ea are în vedere numai satisfacerea funcţiilor propoziţionale de către obiecte? Mergînd mai departe şi considerînd îndoielile lui Tarski în c priveşte posibilitatea demarcării precise între semnele logice şi cel extralogice şi în ce priveşte concluziile care, după el, ar decurge di admiterea imposibilităţii de a trage o asemenea linie de demarcaţie vedem că toate trăsăturile ciudate ale analizei consecinţei la Tarsl izvorăsc din presupunerea că relaţia are loc numai dacă o anumit propoziţie universală este adevărată. într-adevăr, aşa cum mul filosofi care susţin că sînt adepţi ai lui Hume au spus că necesitatea c care un efect urmează cauzei sale nu este nimic altceva decît includ» rea acestei secvenţe particulare într-o asociaţie naturală constant: tot aşa Tarski susţine că necesitatea cu care o consecinţă rezultă i sensul logic al cuvîntului din premise nu este altceva decît includere

---

" *Ibid.,* p. 293. acestei secvenţe particulare într-un fapt universal privitor la satisfacerea anumitor funcţii propoziţionale. Dacă, dînd curs propriilor sale sugestii, lărgim domeniul funcţiilor propoziţionale considerate şi includem printre factorii constanţi din propoziţiile noastre nu numai constantele logice tradiţionale, ci şi toţi termenii generali fără restricţii, ca, de pildă, „om", „fier", „foc" etc., constatăm că definiţia consecinţei la Tarski îmbrăţişează nu numai consecinţa logică, ci şi orice consecinţă în virtutea legilor naturii. Pe scurt, definiţia echivalează cu o generalizare a teoriei necesităţii naturale pe bază de constanţă. Dar acest rezultat nu poate fi pe placul adepţilor lui Hume, deoarece el presupune respingerea concepţiilor

acestora că între necesitatea logică şi cea naturală există o diferenţă de tip.

În apărarea definiţiei lui Tarski s-ar putea susţine eventual că în cazul unei funcţii propoziţionale ca *Dacă p, atunci non-non-p* putem şti *a priori* că funcţia este satisfăcută de orice şir de obiecte, în timp ce pentru o funcţie propoziţională ca *Dacă x a luat arsenic, x va muri* nu putem decît să conjecturăm satisfacerea universală a funcţiei, avînd în vedere temeiuri empirice. Acest lucru este adevărat, însă analiza chestiunii la Tarski nu conţine nici un element de natură să explice deosebirea, iar Tarski însuşi nu se pronunţă în această privinţă. De asemenea, nu este adecvat ca distincţia între diferite tipuri de consecinţe să fie pusă în dependenţă de o distincţie între cazurile în care putem şi cazurile în care nu putem cîştiga o cunoştinţă *a priori.* Dimpotrivă, distincţia epistemologică trebuie explicată luîndu-se în considerare diferenţele de cazuri; or, pînă acum, tocmai acest lucru a lipsit.

Am văzut că convenţionalismul presupune nominalismul şi că, luat în serios, el poate fi făcut să susţină teza că lumea este alcătuită din fapte care în sine nu sînt nici necesare şi nici contingente. De asemenea, am văzut că explicaţia consecinţei la Tarski exclude posibilitatea ca o propoziţie să decurgă din alta în virtutea unei definiţii explicite şi că încercarea lui de a defini relaţia de consecinţă prin referire la universalitate sfîrşeşte prin estomparea distincţiei dintre legile logicii şi legile naturii. Majoritatea logicienilor consideră indezirabile aceste rezultate şi, după cum am presupus, ele nu sînt urmărite nici de autorii teoriilor avute în vedere. Există însă cel puţin un filosof, ?i anume W. V. Quine, care le acceptă integral.

Concepţiile lui Quine se pot rezuma cel mai bine prin propriile sale ruvinte:

„Susţin că este o absurditate, şi chiar rădăcina multor absurdităţi, să vorbim despre > componentă lingvistică şi o componentă factuală în adevărul enunţurilor individuale, mată colectiv, ştiinţa are o dublă dependenţă, faţă de limbaj şi faţă de experienţă; Iar această dualitate nu poate fi urmărită în enunţurile ştiinţei luate unul cîte unul ... Totalitatea aşa-numitei cunoaşteri sau opinii a noastre, începînd de la cele mai obişnuite probleme de geografie şi istorie şi terminînd cu cele mai profunde legi ale fizicii atomice sau chiar ale matematicii pure şi logicii, constituie o construcţie umană care vine în contact cu experienţa numai de-a lungul marginilor sale. Sau, ca să folosim altă metaforă, totalitatea ştiinţei este un cîmp de forţe a cărui condiţie la limită o constituie experienţa. Conflictul cu experienţa la periferie prilejuieşte reajustări

înăuntrul cîmpului. Dar cîmpul total este într-atît de determinat în mod subiacent de către condiţiile sale la limită, de către experienţă, incit avem o mare latitudine de alegere a enunţurilor ce urmează să fie reevaluate în lumina unei singure experienţe contrare .. . Putem considera un enunţ oarecare ca fiind adevărat, indiferent ce s-ar întîmpla, dacă facem reajustări destul de drastice pretutindeni în cadrul sistemului. Pînă şi un enunţ foarte aproape de periferie poate fi considerat adevărat în pofida experienţei recalcitrante, apelind la factorul halucinaţie sau amendînd anumite enunţuri de felul celor numite legi logice. Reciproc, datorită acestei situaţii, nici un enunţ nu este imun la revizuiri. Pînă şi revizuirea unei legi logice — legea terţului exclus — a fost propusă ca un mijloc de simplificare a mecanicii cuantice; şi oare ce deosebire există în principiu între această modificare şi modificarea prin care Kepler l-a înlăturat pe Ptolomeu, sau Einstein pe Newton, sau Darwin pe Aristotel ? . . . Problemele ontologice, potrivit acestei concepţii, sînt de aceeaşi natură ca şi problemele ştiinţelor naturii. Să considerăm, de pildă, problema dacă clasele trebuie incluse printre entităţi. Această problemă, aşa cum am arătat în altă parte, este problema dacă trebuie sau nu cuantificate variabilele care iau ca valori clase. Carnap a susţinut că aceasta nu este o chestiune factuală, ci de alegere a unei forme lingvistice adecvate, de alegere a unei scheme conceptuale convenabile în calitate de cadru al ştiinţei. Sînt de acord cu aceasta, dar numai cu condiţia ca să admitem acelaşi lucru şi in ce priveşte ipotezele ştiinţifice în general. Carnap a recunoscut că nu poate asigura un etalon dublu pentru problemele ontologice şi ipotezele ştiinţifice decît prin admiterea unei distincţii absolute între analitic şi sintetic: nu mai trebuie să repet că eu resping această distincţie”[**********].

Aceasta este o încercare de o îndrăzneală lăudabilă de prezentare a unei analize unitare a demersului ştiinţific, o încercare deosebit de impresionantă într-un moment cînd mulţi filosofi de profesie vorbesc ca şi cum interesul pentru filosofia de sinteză ar fi o formă de maladie mintală. Dar, ca şi idealiştii absolutişti, ale căror moduri de gîndire 1e-a adaptat la empirism, Quine este şi el prea tolerant faţă de paradoxuri şi prea suspicios faţă de bunul simţ. Aşa cum am observat într-o secţiune anterioară, el respinge nu numai întreaga teorie a modalităţii, ci şi noţiunile de propoziţie, atribut şi relaţie. Odată cu acestea dispare şi noţiunea de semnificaţie, deoarece ea este legată prin tradiţie de referirea la enunţuri analitice. Pentru Quine, această eliminare nu pare un sacrificiu, ci, dimpotrivă, o înlăturare a unor prostii primejdioase în ochii altora însă, ea se asemuieşte cu actul unui căpitan care ternar du-se ca vasul său să nu se scufunde încearcă să-l uşureze de povară aruncînd busola peste bord. Fără îndoială, Quine are

---

[**********][62] "Two Dogmas of Empiricism”, publicată iniţial în *The Philosophical Review,* 1951 retipărită cu unele modificări în *From a Logical Point of I'ieu,* pp. 20 — 46, în speciî 42-43 şi 45-46.

dreptate să s< declare nesatisfăcut de propunerea ca un enunţ să fie făcut adevăra numai pe baza regulilor lingvistice. în adevăr, a vorbi despre crearea adevărurilor este oarecum absurd. Doctorul Zamenhof a inventat regulile unui limbaj în care se pot construi o infinitate de propoziţii noi, A
ca de pildă *Ciu patro estas viro,* dar chiar şi cei mai pasionaţi admiratori ai operei sale, afară doar dacă filosofia proastă nu i-a corupt, nu pretind că Zamenhof a creat o infinitate de adevăruri noi. Este însă greşit să presupunem că, deoarece nici un enunţ nu devine adevărat numai pe bază de reguli lingvistice, urmează că orice enunţ trebuie să se raporteze la experienţă în acelaşi mod. Admiterea acestui lucru înseamnă acceptarea tezei de bază a convenţionalismului, şi anume că lumea este alcătuită din fapte fără necesităţi. Dacă considerăm cu toată candoarea evidenţa ce ne stă la dispoziţie, trebuie să admitem că afirmaţia că 2 -]- 2 = 4 se deosebeşte nu numai ca grad, ci şi ca gen de afirmaţia că Everestul este mai înalt decît Mont Blanc. Geografia şi matematica pură sînt într-adevăr amîndouă părţi ale unei mari construcţii edificate de umanitate, dar ele nu sînt părţi de acelaşi fel.

Faptul care pledează cel mai mult în favoarea tezei lui Quine este acela că numeroase enunţuri de universalitate nemărginită par să oscileze în cadrul teoriei noastre a cunoaşterii între un statut empiric şi unul aprioric. Destul de recent, s-a descoperit în mod empiric că fierul poate fi magnetizat; şi totuşi, un fizician modern, întrebat dacă ar concepe posibilitatea abandonării acestei generalizări, s-ar putea să se simtă pus în încurcătură şi să răspundă că ar înclina oarecum să trateze această chestiune ca ceva dincolo de chestiunile empirice. Numeroase cazuri de acest tip au fost discutate de către F. Wais- mann, care a propus în mod independent o concepţie despre ştiinţă oarecum asemănătoare cu cea a lui Quine[88], iar unele dintre exemplele cele mai interesante pe care le dă sînt împrumutate din vorbirea preştiin- ţifică cotidiană. Este oare enunţul „Vedem cu ochii noştri" o generalizare empirică sau este un adevăr pe care îl putem descoperi reflectînd asupra semnificaţiilor cuvintelor „a vedea" şi „ochi"? Nu putem răspunde la o asemenea întrebare dacă nu stabilim ce uzanţă a rămas pînă acum nedecisă. De cele mai multe ori, noi folosim satisfăcător termenii generali pe baza unor analogii, aşa cum

judecătorii rezolvă cazurile uzuale după dreptul cutumiar; dar cînd unul dintre noi este chemat să dea o decizie cu privire la aplicabilitatea unui cuvînt într-o situaţie nai ieşită din comun, atunci, asemenea unui judecător care nu are rici un precedent după care să se ghideze, el trebuie în fapt să legi- ereze. Cu înclinarea lor spre ordine, filosofii au refuzat de multe ori ;ă recunoască aceste fapte şi au vorbit despre limbile naturale ca şi cum acestea ar fi sisteme de reguli şi definiţii, nu mulţimi de uzanţe. Dar pentru fiinţe de felul nostru este esenţial ca limbile noastre să se dezvolte aşa cum se întîmplă efectiv. Nu este un defect al limbii noastre că nu am decis dacă cuvîntul „ochi" înseamnă propriu-zis un organ al vederii sau un obiect de o anumită formă şi compoziţie chimică ce ar putea cumva să nu aibă nimic de-a face cu văzul. Atîta timp cît găsim numai fapte ca cele de care am dat pînă acum, le putem da o descriere adecvată fără a face vreo alegere între aceste alternative. Cuvîntul „ochi" nu este desigur lipsit de semnificaţie. Dar semnificaţia sa nu este determinată atît de complet cum ar putea fi, aşa că mai este loc pentru o legiferare ulterioară, dacă dezvoltarea ştiinţei ar cere-o sau ar sugera-o. Un exemplu similar de complexitate a folosirii obişnuite a cuvintelor îl dă enunţul „Pisoii sînt puii pisicilor". Acceptăm că putem recunoaşte pisoii fără nici o dificultate la simpla lor apariţie, şi totuşi înclinăm să spunem că semnificaţia cuvîntului „pisoi" implică faptul de a fi pui de pisică. Dacă s-ar găsi ceva care să arate exact ca un pisoi dar despre care să putem arăta că nu este pui de pisică, ar fi nevoie de adoptarea unei decizii pe care nimeni n-a găsit-o necesară pînă în clipa de faţă.

Un caz curios de specificare suplimentară a semnificaţiei în ultimele cîteva secole poate fi remarcat de către orice cititor modern care studiază minuţios argumentul prin care Toma d'Aquino încearcă să demonstreze teza că după învierea din morţi nu va mai fi nevoie de hrană *(quod in resurgentibus non erit usus ciborum)*[6]*. Mai întîi, el spune că după ce viaţa coruptibilă va lua sfîrşit, nu va mai fi nevoie de hrană pentru înlocuirea materialului pierdut în cursul corupţiunii. Apoi, el subliniază că hrana va fi inutilă pentru

"Analytic-Synthetic", *Analysis,* X (1949), pp. 25 — 40; XI (1950—1951), pp. 5-38, 49-61, 115-124; XIII (1953), pp. 73-89.

creştere după resurecţie, deoarece fiecare va creşte la mărimea cerută *(in debita quantitate).* Iar apoi, îmboldit poate de considerarea propriei sale înfăţişări, el continuă observînd că a presupune că după înviere va mai avea loc consumare de hrană înseamnă a tăgădui ordinea bună a providenţei, căci un om care mănîncă fără a pierde nimic prin corupţiune ar creşte în proporţii nemăsurate *(perveniet ad immoderatam quantitatem'),* într-adevăr, dacă după învierea din morţi un om continuă să mănînce în tot cursul vieţii sale infinite, trebuie să presupunem că el va creşte la infinit *(oportet dicere quod corpus hominis resurgentis in infinitun augeatur).* Dar aceasta, spune el, este imposibil. Avem aici un argu ment care pînă la un anumit punct este condus cu rigoare ştiinţifică Dar dacă îl considerăm cu toată seriozitatea în contextul ştiinţe moderne, teza lui Toma d'Aquino pare absurdă. Dacă are sens să vorbin despre un corp reînviat aşa cum vorbeşte el, trebuie să aibă sens ş

[54] *Summa contra Gentiles,* IV, 83. să cercetăm ce se petrece în timpul mişcărilor voluntare ale acestui corp. Evident, trebuie să se producă şi contracţii musculare. Dar aceasta presupune oxidarea unor hidraţi de carbon şi un consum corespunzător de ţesut muscular, dacă pierderea nu este recuperată prin hrană, ceea ce Toma refuză să admită. Mai general, un corp resuscitat, de felul celui descris de Sf. Toma, ar fi un *perpetuum mobile* ce funcţionează contrar legilor termodinamicii. La aceasta s-ar putea răspunde eventual că corpurile resuscitate nu sînt supuse legilor naturii pe care omul le-a descoperit ca aplicîndu-se la corpurile coruptibile. Dar la acest punct devine clar pentru cei mai mulţi dintre noi că nu mai concepem aceste legi ale naturii ca generalizări pur empirice ce ar putea fi abandonate fără să abandonăm şi noţiunea de corp organic. în ştiinţa noastră, şi deci şi la nivelurile mai evoluate ale limbajului nostru, ele sînt acum legate între ele prin teoria metabolismului; iar dacă cineva spune că ar exista un organism viu fără procese metabolice, ne simţim înclinaţi să spunem că el combină cuvintele într-un mod lipsit de sens.

Analiza humeistă a legilor naturii, care a fost pînă de curînd dogma empiriştilor, a provenit dintr-o teorie imagistă

a semnificaţiei. Hume a remarcat foarte just că este întotdeauna posibil să ne imaginăm contradictoria oricărei presupuse legi a naturii şi a conchis pe această bază că nici o astfel de lege nu poate fi o lege a necesităţii obiective. Exponenţii de mai tîrziu ai doctrinei sale, care au considerat că semnificaţia este determinată întotdeauna de convenţii iniţiale, atrag atenţia asupra faptului că negaţia unei presupuse legi a naturii nu este niciodată o autocontradicţie formală şi nici nu este reductibilă la o atare autocontradicţie care să nu presupună legea însăşi. Nici unul din aceste argumente nu demonstrează ceea ce are de demonstrat. Desigur, este adevărat că ne putem imagina, în sensul strict al acestui cuvînt (adică ne putem reprezenta cu ochii minţii), oameni care trăiesc la nesfîrşit fără să se hrănească. Dar aceasta este neconcludent, deoarece nu discutăm despre facultăţile noastre imaginative. Este adevărat şi faptul că propoziţia „Omul va trăi de-a pururi fără hrană" nu prezenta vreun defect lingvistic evident înainte de a se fi dezvoltat fiziologia, şi că, pînă şi acum, dacă hotărîm un timp să ne concentrăm atenţia asupra contextelor în care am învăţat iniţial cuvintele componente, putem da un anumit sens acestui comentar. Dar nici aceasta nu este concludent, deoarece se poate spune că o remarcă are sens numai pentru că nu este exclusă de vreo regulă de întrebuinţare recunoscută.

La orice moment dat, semnificaţiile cuvintelor folosite sînt fixate prin doi factori, şi anume (I) relaţiile lor cu trăsăturile perceptibile ale anumitor situaţii care provoacă folosirea lor şi (II) relaţiile lor reciproce în cadrul mecanismului limbii noastre. Filosofii de tradiţie empiristă şi-au îndreptat uneori atenţia exclusiv la relaţiile de primul gen, dar avem multe cuvinte care nu intră în asemenea relaţii, iar pentru toate cuvintele (de ex. chiar pentru cuvintele care desemnează culori), relaţiile de al doilea gen prezintă o importanţă cel puţin tot atît de mare. încă înaintea evoluţiei ştiinţei, limbajul nostru era o structură complexă, care avea contact cu experienţa numai în anumite locuri; dar pe măsură ce ştiinţa se dezvoltă, legăturile interne devin din ce în ce mai complexe şi apar cuvinte noi, ca „electron" şi „genă", care se îndepărtează mult de experienţă dar nu sînt neapărat foarte depărtate de întreaga realitate. Scopul acestei restrîngeri a structurii interne a unei limbi este de a o face să corespundă mai bine lumii. Atîtatimp cît putem construi liber propoziţii

ca „Omul va trăi în veci fără hrană”, veşmîntul lingvistic pe care l-am croit lumii este prea larg, şi, asemenea unor buni croitori, trebuie să intrăm cu foarfecele. Această ajustare deliberată, la care s-a recurs numai în ultimele cîteva secole, este metoda ştiinţei empirice, iar recunoaşterea particularităţii ei trebuie să înlăture confuziile serioase iscate în jurul necesităţii şi limbii.

Quine merge mult prea departe cînd încearcă să abolească distincţia dintre adevărurile contingente şi cele necesare. Pe de o parte, enunţurile istoriei şi geografiei rămîn întotdeauna contingente, deoarece ar fi zadarnic să excludem alternativele printr-o legiferare de ordin lingvistic ; iar pe de altă parte, enunţuri ca „Nimic nu este în acelaşi limp roşu şi verde” sînt în mod necesar adevărate de la bun început, deoarece ele sînt garantate de regulile urmate de la bun început în distingerea culorilor. Dar nu întotdeauna este uşor să determinăm statutul propoziţiilor de universalitate nemărginită pe care le formulăm în cadrul ştiinţelor empirice. Atîta timp cît sîntem gata să admitem că una din aceste propoziţii poate fi infirmată, nu putem pretinde că cunoaştem în mod aprioric necesitatea ei. Dacă acceptăm vreodată o atare propoziţie fără nici o rezervă, atunci noi revendicăm totodată o asemenea) cunoaştere *a priori.* Dar aici trebuie să fim gata să distingem cazurile după cunoştinţele necesare. Dacă decidem pur şi simplu să privim fierul ca magnetic prin definiţie, excludem posibilitatea simplei utilizări a cuvîntului „fier” pentru orice metal nemagnetic, dar în felul acesta noi nu sporim înţelegerea noastră a conexiunilor lumii fizice. Dacă însă introducem această nouă specificare a semnificaţiei cuvîntului „fier” numai pentru a distinge fierul de un alt metal cu care în caz contrar s-ar confunda, noi facem ca enunţul „Fierul este magnetic” să fie chiar inutil în scopurile inferenţei. Dacă, pe de altă parte, atunci cînd sîntem în măsură să recunoaştem satisfăcător fierul fără a-l supune unei testări pentru această proprietate, noi reuşim să deducem această proprietate dintr-o teorie asupra constituţiei fierului, teorie ce îmbrăţişează nu numai un număr de alte generalizări despre fier, ci constituie în sine o parte integrantă a unei teorii mai largi despre substanţă în general, avem dreptul să considerăm că am dobîndit un mare spor de cunoaştere. în orice caz însă, putem fi în stare să spunem că generalizarea noastră fără restricţii se transformă datorită evoluţiei limbii

într-un truism garantat de un principiu admis al conexiunii necesare. Logica, aşa cum am încercat s-o prezentăm în cadrul secţiunii noastre de logică modală, este teoria acestei conexiuni necesare — nu teoria tuturor conexiunilor numeroase care au loc între diverse universalii, ci teoria acelui gen de conexiune în genere, şi, ca atare, ea trebuie să ocupe o poziţie unică în analiza pe care o facem ştiinţei.

Quine recunoaşte că logica ocupă un loc special în rîndul ştiinţelor, dar insistă asupra faptului că şi logica este pasibilă de revizuiri:

„Reevaluarea unor enunţuri atrage după sine reevaluarea altora, din cauza interconexiunilor lor logice, legile logice fiind la rîndul lor pur şi simplu anumite enunţuri noi ale sistemului, anumite elemente noi ale cîmpului. Reevaluarea unui enunţ ne obligă la reevaluarea altora, care pot fi enunţuri legate logic cu primul sau pot fi enunţuri despre conexiunile logice înseşi”[55].

Iată o mostră nefericită de egalitarism. într-adevăr, principiile fără de care nu putem concepe nici un sistem aşa cum îl descrie el sînt în mod evident îndreptăţite la o analiză separată. Fiind presupuse de însuşi conceptul de sistem, ele sînt cel puţin absolute *a priori,* orice s-ar spune despre conţinutul unui anumit sistem la un moment dat.

Analiza corectă a ştiinţei impune admiterea faptului că, dacă facem distincţie între lume şi acele trăsături ale limbajului care sînt create de om, conexiunile necesare aparţin lumii în nu mai mică măsură decît faptele contingente. Din păcate, teoria convenţionalistă a necesităţii, derivată din opera lui Wittgenstein, are o influenţă atît de puternică, încît pînă şi K. R. Popper (care în general nu este receptiv la influenţe provenite din această sursă) a scris:

„Spre deosebire de Kneale, consider că «necesar» este un simplu cuvînt, o etichetă care ne permite să deosebim universalitatea legilor de universalitatea «accidentală». Desigur, orice altă etichetă ar fi tot atît de potrivită, deoarece aici nu intră prea mult in joc necesitatea logică. Sînt în mare măsură de acord cu spiritul parafrazei lui Wittgenstein la Hume : «Nu există necesitatea ca un lucru să se întîmple pentru că s-a întîmplat un alt lucru. Nu există decît necesitate logică»”[58].

în altă parte însă, el a scris:

„Un enunţ poate fi caracterizat ca necesar în mod natural sau fizic dacă şi numai dacă este deductibil dintr-o funcţie prepoziţională care este satisfăcută în toate lumile §§§§

********** care se deosebesc de lumea noastră, dacă în genere se deosebesc, numai în ce priveşte condiţiile iniţiale”[67].

Aceasta pare să însemne că o lege naturală are loc pentru toate lumile *posibile* care conţin exemplificări ale aceloraşi atribute şi relaţii ce sînt ilustrate în lumea actuală şi numai pe ele. Dar Popper compară definiţia sa cu definiţia adevărului analitic la Tarski, fără să observe că atunci cînd vorbim despre adevăr în toate lumile posibile cu aceleaşi trăsături care revin, noi introducem un element radical nou, şi anume tocmai ceea ce urmăreşte apărătorul necesităţii obiective. Nici o necesitate, indiferent dacă este logică sau naturală, nu poate fi redusă — cum pare să creadă Popper — la universalitatea nudă, deoarece ne putem închipui că pînă şi o propoziţie nemărginit universală trebuie să fie contingent adevărată. Dar nu se poate ridica nici o obiecţie împotriva unei definiţii a necesităţii ca adevăr în toate luminile posibile, deoarece particularitatea conceptului ce urmează a fi definit este păstrată aici de cuvîntul modal „posibil”. Este clar că universalitatea cu care ceva are loc chiar şi în lumi diferite de lumea actuală nu poate fi doar contingenţă.

Nu propunem însă ca noţiunea de necesitate să fie definită în acest mod, ci propunem ca noţiunea mai potrivită de cuprindere (involu- tion) să fie recunoscută ca un concept fundamental în descrierea naturii şi chiar şi în explicarea funcţionării limbajului obişnuit. Dacă noţiunea are într-adevăr acest rol, teoria ei trebuie să ocupe un loc privilegiat în rîndul ştiinţelor. în ultimele două capitole ale acestei cărţi vom avea prilejul să considerăm din nou relaţia acestei teorii faţă de cercetările numite matematice, iar rezultatul analizei va fi o înţelegere mai clară a importanţei sale. ††

XI

FILOSOFIA MATEMATICII DUPĂ FREGE

********** *The Logic of Scientific Discovery,* (1559), p. 438.

†† *Ibidem,* p. 433.

1. *Paradoxurile teoriei mulţimilor*

încă din 1895, Cantor a descoperit că teoria mulţimilor creată de el conţinea o antinomie. Este vorba de paradoxul publicat doi ani mai tîrziu de către Burali-Forti, privind ordinalele transfinite pe care nu le-am analizat atunci cînd am schiţat sistemul lui Cantor. După aceea, în 1899, Cantor a descoperit acel paradox despre mulţimi, mai simplu şi fundamental, care poartă astăzi numele lui. Să presupunem că S este mulţimea tuturor mulţimilor. Conform propriei sale teoreme despre mulţimile putere, > S. Dar întrucît *(ILS* este o mulţime de mulţimi (şi anume mulţimea tuturor submulţimilor lui S), ea trebuie să fie o parte a mulţimii tuturor mulţimilor, adică a lui S. Iar de aici rezultă că *(US* S, ceea ce contrazice rezultatul pe care îl obţinusem mai sus.

Fără îndoială, modul naiv în care Cantor asuma existenţa mulţimilor avea ceva defectuos în el, dar abia în 1903 dificultatea a devenit cunoscută pe scară largă. în acel an, Frege a publicat volumul doi din *Grundgesetze,* cu un post-scriptum (datat octombrie 1902) care începea astfel:

,,Cu greu i s-ar putea întîmplă unui om de ştiinţă ceva mai de nedorit decît zdruncinarea uneia din temeliile edificiului său, după ce lucrarea sa a fost încheiată.

în această situaţie m-am găsit pus în urma unei scrisori a domnului Bertrand Russell, pe cînd tipărirea acestui volum se apropia de sfîrşit. Este vorba de legea mea fundamentală (V). Nu mi-am închipuit niciodată că această lege ar fi tot atît de evidentă ca ?i celelalte legi fundamentale, ceea ce de fapt s-ar şi cere pentru o lege logică. Aşa că, in prefaţa la volumul I, p. VII, am indicat această slăbiciune. Aş fi renunţat bucuros a acest fundament dacă aş fi cunoscut un înlocuitor oarecare al lui. Chiar şi astăzi, nu văd cum ar putea fi întemeiată ştiinţific aritmetica şi cum ar putea fi concepute nunie- •ele ca obiecte logice şi supuse analizei dacă nu este permis — cel puţin în mod condiţio- îat — să trecem de la un concept la extensiunea acestuia. Pot eu oare să vorbesc despre extensiunea unui concept, a unei clase ? Iar dacă nu, cum sînt recunoscute excepţiile ? ? utem oare conchide întotdeauna, pe baza faptului că extensiunea unui concept coincide eu extensiunea altuia, că fiecare obiect care cade sub primul concept cade şi sub al doilea ? iceste probleme au fost ridicate de comunicarea domnului Russell.

Solatium miseris, socios habuisse dolorum. Această consolare, dacă este cumva o onsolare, îmi aparţine şi mie; într-adevăr, toţi cei ce au făcut uz în demonstraţiile lor le extensiuni ale conceptelor, de clase, de mulţimi, sînt în aceeaşi situaţie cu mine. Aici nu este pus in joc modul meu special de demonstraţie, ci posibilitatea unei fundări logice a aritmeticii în general.

Dar să ne întoarcem la problemă I Domnul Russell a descoperit o contradicţie.care poate fi acum prezentată.

Nimeni nu va dori să afirme despre clasa oamenilor că este un om. Avem aici o clasă care nu îşi aparţine ei însăşi. Intr-adevăr, spunem că ceva aparţine unei clase cînd cade sub conceptul a cărui extensiune este tocmai această clasă. Să considerăm acum conceptul *Clasa care nu îşi aparţine ei însăşi.* Extensiunea acestui concept, dacă putem vorbi despre ea, este, aşadar, clasa claselor care nu îşi aparţin lor înseşi. O vom numi prescurtat clasa K. Ne întrebăm acum dacă această clasă K îşi aparţine ei însăşi. Să admitem mai întîi că îşi aparţine. Dacă ceva aparţine unei clase, atunci cade sub conceptul a cărui extensiune este această clasă. Aşadar, dacă clasa noastră îşi aparţine, ea este o clasă care nu-şi aparţine. Prima noastră presupunere conduce deci la o contradicţie. Să presupunem acum că clasa noastră K nu-şi aparţine ei însăşi; atunci, ea cade sub conceptul a cărei extensiune este ea însăşi şi deci îşi aparţine. Din nou, o contradicţie l"‡‡‡

tuturoi claselor care nu sînt proprii lor membri. Dar Frege nu putea să se împac» cu această inovaţie revoluţionară şi a încercat în schimb să evite contra dicţia modificînd a cincea axiomă din sistemul său, axiomă care- trezise întotdeauna unele suspiciuni. El a propus acum ca două con cepte să fie caracterizate ca avînd aceeaşi extensiune dacă şi numa dacă fiecare obiect care cădea sub primul *dar nu era el însuşi exten*

siunea primului cădea şi sub al doilea, şi reciproc. într-un apendice la *Principles of Mathematics,* Russell recomanda această propunere unei analize serioase; dar el nu a apelat la ea în celelalte scrieri ale sale, pesemne pentru că în urma unei examinări mai minuţioase propunerea l-a nemulţumit, iar logicienii de mai tîrziu au demonstrat într-adevăr că această modificare nu este suficientă pentru a elibera de orice contradicţii sistemul lui Frege**********.

Cînd a avut răgazul să se oprească mai mult asupra problemei, Russell a ajuns la concluzia că prima propunere a lui Frege era mai bună. Russell considera că există unele funcţii propoziţionale care nu determină clase veritabile, iar problema care sta în faţa logicianului era de a stipula reguli pe baza cărora aceste funcţii *nepredicative,* cum le-a numit el, să poată fi distinse de celelalte funcţii. Contradicţiile păreau să rezulte din faptul că logicienii au admis în mod imprudent clase care, într-un mod foarte curios, se dovedeau a fi *autoreproductive.* Poate că asemenea monstruozităţi ar fi fost excluse prin limitări speciale ale utilizării notaţiei pentru clase, dar Russell înclina puternic să creadă că problema nu putea fi niciodată rezolvată integral atîta timp cît toate clasele nu ar fi fost eliminate din teoria logică în acelaşi mod în care infiniţii mici fuseseră eliminaţi din teoria calculului diferenţial ; ca atare, el considera că trebuie neapărat să se studieze cît de mare este acea porţiune a matematicii ce ar putea fi prezentată fără să recurgem la o notaţie pentru clase††††††

fost un remediu efectiv >entru maladia paradoxurilor de care sufereau matematicile pe atunci, tntr-adevăr, distincţia funcţiilor după niveluri, introdusă de Frege, ace imposibilă în scrierea sa reproducerea unor paradoxuri despre :uncţii, analoage contradicţiilor lui Cantor şi Russell cu privire la :lase. Dezastrul la care a ajuns se datora de fapt indulgenţei cu care ;i-a permis să recurgă la o notaţie pentru clase fără distincţii după îivele, ca un procedeu pentru evitarea complicaţiilor propriei sale :eorii asupra funcţiilor propoziţionale. Acesta este un aspect foarte mportant, la care va trebui să revenim, dar deocamdată este suficient iă notăm că atunci cînd Russell a venit cu teoria sa „fără clase", el lescoperise deja un paradox care putea fi folosit pentru a arăta că eferirea la clase nu era unica sursă a dificultăţilor. în locul clasei Lespre care presupunem că ar conţine toate clasele care nu sînt proprii or membri, să considerăm proprietatea de a fi o proprietate care nu se exemplifică pe ea însăşi. Dacă această proprietate se exemplifică pe sine, atunci ea nu se poate exemplifica pe sine; iar dacă nu se exemplifică pe sine, atunci ea trebuie să se exemplifice pe sine. Este clar că natura dificultăţii este aceeaşi ca în paradoxul iniţial, şi totuşi aici nu se face nici o referire la clase.

Cînd Russell şi-a publicat sugestia sa după care unele funcţii propoziţionale ar fi nepredicative. Henri Poincare era angajat în urmărirea ostilă a tentativelor lui Peano şi ale adepţilor acestuia de a explica raţionamentul matematic prin metodele logicii simbolice‡‡‡

continua prin a spune că de fapt nu există nici o contradicţie, întrucît mulţimea numerelor zecimale definibile printr-un număr finit de cuvinte nu putea fi de fapt concepută ca avînd un element definibil numai pe baza referirii la întrega mulţime. Generalizînd pe această bază, Poincare scria: „Ainsi Ies d^finitions qui doivent etre regardees comme non-prddicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux" [Aşadar, definiţiile care trebuie privite ca nepredicative sînt cele ce conţin un cerc vicios]. în literatura de mai tîrziu, expresia „nepredicativ" (sau „impredicativ") a fost utilizată adesea ca şi cum ar fi *definită* prin această remarcă, cu alte cuvinte ca şi cum „definiţie nepredicativă" ar fi echivalent cu „definiţie care urmăreşte să distingă un obiect aflat sub un concept prin intermediul unei referiri la totalitatea obiecteloi posibile care cad sub acel concept"§§§

arăta un articol despre *Insolubilia* din *Dicţionarul de filosofie şi psihologie* al lui Baldwin**********.

Aceste schimbări au dus la o resuscitare a interesului pentru paradoxurile logice de toate genurile, iar în 1910 Mincinosul lui Eubulide a fost onorat printr-un tratat întreg, *'Der Liigner, Theorie, Geschichte und Auflosung,* de A. Riistow. Printre noile paradoxuri inventate în acea perioadă sau la scurt timp după aceea, cele mai cunoscute sînt probabil paradoxurile lui Berry şi Grelling. Paradoxul lui Berry priveşte *cel mai mic număr întreg nedenumibil în mai puţin de douăzeci şi şapte silabe.* Deşi pare evident că orice nume al acestui întreg trebuie să conţină cel puţin 27 silabe, cuvintele de mai sus, tipărite cursiv, oferă un nume care conţine numai 26 silabe. Paradoxul lui Grelling are de-a face cu un cuvînt nou inventat. Unele adjective ca „scurt" şi „român" se aplică lor înseşi, altele ca „lung" şi „german" nu se aplică. Să numim adjectivele din a doua grupă *heterologice.*- Este oare heterologic însuşi adjectivul „heterologic" ? Dacă este, atunci, în conformitate cu definiţia dată mai sus, el nu se aplică lui însuşi şi deci nu poate fi heterologic. Pe de altă parte, dacă nu este heterologic, atunci, în conformitate cu definiţia de mai sus , el se aplică la sine însuşi şi deci trebuie să fie heterologic. Întrucît aceste sofisme se aseamănă cu contradicţiile lui Cantor şi Russell, dar nu au nimic de-a face cu infinitul, apariţia lor a întărit întrucîtva poziţia lui Russell împotriva lui Poincare.

în cartea sa *Principles of Mathematics,* publicată în 1903, Russell i ajuns în mod independent la o concepţie despre matematică similară concepţiei lui Frege, şi deşi găsea ca şi Frege că paradoxurile constituie un factor perturbator, el mai spera încă într-o demonstrare satisfăcătoare a identităţii dintre aritmetică şi logică. Iată de ce el credea că este important să se arate că paradoxurile proveneau dintr-o prezentare defectuoasă a logicii. Nu ar fi suficient să explicăm contradicţiile teoriei mulţimilor prin reflecţii asupra trăsăturilor caracteristice ale agregatelor infinite, dar nici să le excludem printr-o legiferare *ad-hoc* a folosirii simbolurilor. Dacă ar fi ales una din aceste direcţii, el nu ar mai fi fost capabil să spună că aritmetica e identică cu logica pură şi nu ar fi avut nici o garanţie că nu pot să apară

********** "Les paradoxes de la logique", *Revue de metaphysique et de morale* XIV (1906), pp. i27 — 650. Articolul despre *Insolubilia* din *Dictionary of Philosophy and Psychology,* ditat de Baldwin, era scris de C. S. Peirce.

contradicţii noi. Singura soluţie satisfăcătoare a problemei ar fi eliminarea paradoxurilor printr-o reformă care s-ar impune de la sine ca o necesitate evidentă de ordin logic încă din clipa în care ar fi propusă; şi, după cum vom vedea, tocmai aceasta este ceea ce a încercat Russell în teoria tipurilor logice. Dar în 1908, anul în care a făcut prima expunere a acestei teorii, au mai apărut şi alte două articole, care propuneau noi modalităţi de-a face faţă crizei şi noi doctrine cu privire la relaţia dintre matematică şi logică. În următoarele trei secţiuni urmează să analizăm aceste trei propuneri, precum şi relaţiile dintre ele.

2. *Teoria tipurilor logice a lui Russell*

În articolul său din 1908 cu titlul „Mathematical Logic as based on the Theory of Types”[†] şi, de asemenea, doi ani mai tîrziu în al doilea capitol al introducerii la prima ediţie din *Principia Mathematica,* Russell prezenta teoria sa asupra tipurilor logice ca pe o consecinţă a principiului cercului vicios, emis de el, şi ca necesară pentru soluţionarea paradoxurilor, însă o recomanda totodată ca fiind compatibilă cu bunul-simţ şi intrinsec credibilă. Să considerăm mai întîi raţionamentul prin care această teorie a fost introdusă, precum şi forma pe care a luat-o atunci cînd a fost dezvoltată pe deplin.

După Russell, o funcţie propoziţională presupune totalitatea valorilor sale dintr-un motiv pe care el îl formulează după cum urmează:

„Cînd vorbim despre «<px», unde *x* nu este specificat, înţelegem o valoare a funcţiei dar nu una definită. Putem exprima acest fapt spunînd că «ţ>x» *denotă în mod ambigui <ţa, <ţb,* <pc etc., unde *<ţa, <ţb, <ţc* etc. sînt diversele valori ale lui » . . . Rezultă ci *<nţx»* are o semnificaţie bine definită (bine definită, adică numai în măsura în care ni ţine de esenţa ei de a fi ambiguă) dacă obiectele *<ţa, <ţb,* <pc etc. sînt bine definite . . Rezultă de aici că nici o funcţie nu poate avea printre valorile sale ceva ce ar presupum funcţia, căci dacă ar avea, nu am putea considera obiectele denotate în mod ambiguu d< către funcţia respectivă ca fiind definite atîta timp cit funcţia nu era definită, pe cind, reciproc, aşa cum tocmai am văzut, funcţia nu poate fi definită atîta timp cit valorile sale nu sînt definite. Acesta este numai un caz particular, dar poate cazul fundamental, al principiului cercului vicios. O funcţie este ceea ce denotă în mod ambiguu ceva dintr-o anumita totalitate, şi anume valorile funcţiei;

[†] *American Journal of Mathematics,* XXX (1908), pp. 222 — 262; republicat în *Logi and Knowledge,* pp. 59 — 102.

prin urmare, această totalitate nu poate conţine membri care presupun funcţia, întrucît în caz contrar ar conţine membri care presupun totalitatea, ceea ce, conform principiului cercului vicios, nu poate fi cazul pentru nici o totalitate”’.

Terminologia acestui pasaj este nefericită. O funcţie, nefiind un semn, nu poate denota nimic; şi nici măcar despre o expresie funcţională, care într-adevăr este un semn, nu putem spune propriu-zis că denotă valorile funcţiei, fie ambiguu, fie neambiguu. Dar concluzia la care conduce raţionamentul de mai sus este foarte interesantă:

„Deci nu poate exista nimic în genul unei valori pentru $\hat{x}$ cu argumentul $\hat{x}$, sau cu orice argument care ar presupune $\hat{x}$. Cu alte cuvinte, simbolul «?(?*) *t* nu poate să exprime o propoziţie, aşa cum exprimă «ţ>(a) > în cazul cînd $\hat{a}$ este o valoare pentru $\hat{x}$. In fapt, «p(ox) » trebuie să fie un simbol care nu exprimă nimic : de aceea, putem spune că acest simbol nu este semnificator. Prin urmare, fiind dată o funcţie arbitrară Â
<p *x,* există argumente pentru care această funcţie nu are nici o valoare, după cum există şi argumente pentru care are o valoare.”[10]

în primul său articol cu privire la teorie, Russell spune că un tip poate fi definit ca un domeniu de semnificaţie, cu alte cuvinte ca acea colecţie a argumentelor pentru care o funcţie propoziţională dată admite valori; dar ulterior el adaugă că funcţiile propoziţionale se pot clasifica în tipuri după entităţile pe care le admit ca argumente adecvate. Aceste două modalităţi de a descrie starea de lucruri sînt echivalente ; într-adevăr, consideraţiile lui Russell ne cer să admitem o ierarhie de entităţi. Aşadar, dacă considerăm oamenii ca indivizi sau entităţi de tipul 0 vom considera că a fi înţelept (adică funcţia propoziţională exprimată prin *x este înţelept)* este de tipul 1, deoarece poate fi asertată semnificativ, deşi eventual nu în mod adevărat, despre Socrate sau Alcibiade, iar a fi o virtute cardinală este de tipul 2, deoarece ea poate fi asertată cu sens despre înţelepciune; în general, orice atribut este de un tip mai înalt decît entităţile despre care el poate fi afirmat sau negat cu sens. Este adevărat că argumentarea lui Russell, care porneşte de la principiul cercului vicios, nu demonstrează nicidecum că un atribut trebuie să fie întotdeauna de tipul *imediat* mai înalt decît entităţile despre care poate fi afirmat sau negat cu sens; dar tocmai acest lucru îste presupus de Russell atunci cînd îşi dezvoltă teoria sa şi este necesar dacă — aşa cum în mod evident consideră Russell — entităţi de acelaşi tip trebuie să fie substituibile una prin alta în mod universal, în sensul că

ceea ce se poate afirma sau nega cu sens despre o entitate poate fi negat sau afirmat cu sens despre fiecare dintre celelalte entităţi.

Atîta timp cît operăm numai cu funcţii atributive, putem considera că diversele tipuri sînt aranjate în mod ierarhic într-o ordine ascendentă simplă; dar cînd luăm în consideraţie şi funcţiile relaţionale, trebuie să admitem o complexitate mai mare, ce nu poate fi reprezentată adecvat dacă facem uz numai de numere ordinale. Astfel, o relaţie cu doi termeni ar putea avea loc între entităţi care sînt amîndouă indivizi şi astfel ar putea fi caracterizată eventual ca fiind de acelaşi nivel ca un atribut al indivizilor, însă ea trebuie să se distingă ca tip de atare atribute şi totodată trebuie să se distingă şi de relaţiile ternare care au loc între indivizi. Tot astfel, pot exista relaţii, cum este relaţia de exemplificare, care au loc între entităţi de tipuri diferite. Utilizînd în continuare numeralul „0” pentru a reprezenta tipul indivizilor, putem spune eventual că funcţiile care iau ca argumente adecvate numai indivizi sînt de tipurile (0), (0, 0), (0, 0, 0) etc., că un atribut al unui atribut al unui individ este de tip ((0)), că un atribut al unei relaţii binare între indivizi, cum de exemplu este tranzitivitatea relaţiei de a fi un strămoş, este de tipul ((0, 0)), că o relaţie cum este exemplificarea poate fi de tipul (0, (0)) şi aşa mai departe. Ca regulă generală însă, nici o funcţie propoziţională nu poate lua argumente decît de tipul sau tipurile mai coborîte adecvate, adică de tipul sau tipurile al cărui semn sau ale căror semne în notaţia de mai sus ar fi găsite prin eliminarea parantezelor exterioare din semnul tipului funcţiei propoziţionale respective‡‡‡

paradoxurilor cu privire la clase prin evitarea claselor înseşi este extravagant, aşa cum extravagantă ar fi propunerea de a suprima bolile copiilor supri- mînd copiii înşişi. Dar de fapt Russell vrea să spună ceva mult mai rezonabil decît ceea ce sugerează terminologia la care recurge. Russell susţine că desemnările claselor sînt simboluri incomplete, adică simboluri care nu pot fi definite în mod izolat dar pot fi definite însoţite, întrucît toate complexele în care intră cu sens pot fi înlocuite prin complexe echivalente în care aceste simboluri nu mai apar. Astfel, A
ori de cîte ori avem o expresie de forma *AexfJFx),* putem înlocui această expresie prin una de forma *FA,* şi tot astfel, în cazuri mai complicate, semnele de clasă se pot elimina fără nici o pierdere. Uneori, Russell exprimă toate acestea spunînd că clasele sînt ficţiuni care nu rezistă analizei, dar asemenea remarci trebuie interpretate în lumina spuselor sale cu privire la simbolurile incomplete: ele sînt sugerate, fără îndoială, de terminologia juriştilor, care vorbesc despre corporaţii ca despre personalităţi fictive.

Acum, conform explicaţiei date de Russell, cînd încercăm să traducem paradoxul său asupra claselor în maniera cerută de teoria „fără clase", rezultatul la care ajungem constituie o combinaţie de simboluri interzisă de teoria tipurilor şi astfel este evident că paradoxul survine din cauză că gramatica obişnuită nu reuşeşte să satisfacă toate cerinţele logicii. Potrivit propriilor sale cuvinte :

„O propoziţie privitoare la o clasă trebuie redusă întotdeauna la un enunţ cu privire la o funcţie care defineşte acea clasă, adică cu privire la o funcţie care este satisfăcută de membri ai clasei şi nu este satisfăcută de nici un alt argument. Prin urmare, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcţie şi care presupune funcţia, aşa cum, de exemplu, (r)-<px presupune funcţia 9. O clasă deci, conform principiului cercului vicios, nu are A sens să fie argument pentru funcţia care o defineşte, adică, dacă denotăm prin «z(<pz)» A Ă clasa definită de 9?, simbolul «9(2(92)}. trebuie să fie lipsit de sens"[12].

în vederea soluţionării altor paradoxuri, cum este cel al lui Berry şi paradoxul mincinosului, este necesară o elaborare ulterioară, dar numai una ce pare a fi în orice caz cerută de principiul cercului vicios. Aceasta este teoria ramificată a tipurilor sau distingerea ordinelor înăuntrul tipurilor, iar Russell explică necesitatea acesteia după cum urmează:

A A
„Fie /<9-, *x)* o funcţie de două variabile 92 şi *x.* Atunci, dacă păstrînd pentru moment pe *x* fixat, afirmăm aceasta pentru toate valorile posibile 9, obţinem o propoziţie (9) • A
• *f(<ţz, x).* Atunci, dacă *x* este variabil, avem o funcţie de *x;* dar întrucît
această funcţie A

presupune o totalitate de valori pentru 92, ea însăşi nu poate fi una din valorile incluse în totalitate, aşa cum ne arată principiul cercului vicios. Rezultă că totalitatea tuturor A A
valorilor lui 92 vizate de (9)- *f(<ţz,x)* nu este totalitatea funcţiilor în care *x* poate figura ca argument şi rezultă de asemenea că nu există nici o totalitate în genul totalităţii funcţiilor în care *x* poate figura ca argument"[13]

Pentru simplitate, în distincţia pe care o facem între ordine putem începe prin a presupune că avem de-a face numai cu funcţii care iau ca argumente adecvate indivizi. Dacă o funcţie oarecare de acest gen se poate defini fără aplicarea cuantorilor la nişte variabile oarecare diferite de variabilele individuale, putem spune că funcţia aparţine primului ordin. Luînd încă o dată oamenii în calitate de indivizi, putem da ca exemple funcţiile exprimate de *Socrate iubeşte pe x* şi *Fiecare îl iubeşte pe x.* Atunci, după Russell, „funcţiile de ordin 2 sînt astfel încît conţin variabile care sînt funcţii de ordinul 1, dar nu conţin nici o altă variabilă, exceptînd (eventual) indivizi”§§§

incorect ca acoperind nu numai numele proprii în sensul obişnuit, adică desemnările care nu presupun nici o funcţie, ci şi descripţiile care presupun funcţii de *toate* ordinele. Dacă vrem să vorbim corect despre descripţii, trebuie să fim în măsură a specifica ordinul sau ordinele funcţiilor pe care acestea le implică. Dar atunci, orice descripţie care se referă la descripţii ce presupun funcţii de ordin n va presupune la rîndul ei o funcţie de ordinul $n + 1$ şi astfel nu se va putea aplica la ea însăşi. Similar, paradoxul mincinosului poate fi înfăţişat ca o încercare de a utiliza descripţia „ceea ce spun" fără să se ţină seama de necesitatea unei distincţii între propoziţii după ordinele lor. Aceste rezultate ale teoriei ramificate a tipurilor sînt cît se poate de satisfăcătoare dar, din păcate, această teorie conduce la limitări foarte drastice ale discursului. Poate că nu are importanţă că nu avem voie să spunem „Napoleon avea toate calităţile necesare unui mare general" atîta timp cît nu sîntem în măsură să adăugăm că respectivele calităţi sînt cele de ordinul unu sau, în orice caz, calităţile unei mulţimi finite de ordine. Important este însă faptul că, după cum se pare, ne este interzis să formulăm anumite teoreme matematice binecunoscute, şi în particular teorema că orice mulţime nevidă de numere reale superior mărginită are o margine superioară strictă.

Trebuie reamintit că, conform teoriei lui Eudoxus şi Dedekind, un număr real este o tăietură a numerelor raţionale sau, mai precis, este cea mai joasă dintre cele două mulţimi infinite în care poate fi divizată printr-o tăietură trama numerelor raţionale. De aici rezultă că o mulţime de numere reale este o mulţime de mulţimi de numere raţionale. Acum, dacă S este o mulţime nevidă de numere reale superior mărginită, marginea superioară strictă a lui S se presupune a fi un număr real care este în acelaşi timp reuniunea sau suma logică a tuturor numerelor reale din S, adică acea mulţime care are ca membri ai săi toate acele numere raţionale care sînt membri ai oricăruia dintre membrii lui S. Aici s-ar părea că avem o încălcare a teoriei ramificate a tipurilor, într-adevăr, mulţimea numerelor raţionale care constituie un număr real, fiind o mulţime infinită, nu poate fi specificată decît dacă facem menţiune de o funcţie propoziţională pe care o satisfac toţi membrii săi, iar expresia funcţională despre care am presupus că specifică marginea superioară strictă a unei mulţimi infinite

de numere reale trebuie să implice, după cum se pare, o referire la totalitatea funcţiilor propoziţionale care specifică numere reale, *inclusiv acea funcţie pe care o exprimă.* Dacă afirmăm că cea mai mică margine superioară trebuie să aparţină unui ordin de numere reale distinct de cel al numerelor lui S şi totodată că nu pot exista teoreme absolut generale despre numere reale, fără restricţii de ordin — analiza matematică, în accepţia ei uzuală, devine în acest caz imposibilă. Se pune întrebarea: cum poate să evite Russell această consecinţă neplăcută — dacă în genere o soaţe evita —, continuînd să utilizeze însă teoria sa ramificată a ipurilor în vederea excluderii paradoxurilor ?

Russell încearcă să ajungă la o soluţie introducînd axioma reductibi- ităţii. Este vorba de presupunerea că pentru fiecare funcţie propozi- ională există o funcţie predicativă (în sensul din *Principia Mathe- •tatica)* ce este satisfăcută de toate argumentele de aceeaşi natură i de nici un alt argument[16], sau, în simboluri:

(/)(3 $)(*)[/* = SN-

>acă admitem aceasta, dificultatea cu privire la ordinele numerelor sale poate fi învinsă. într-adevăr, putem spune că funcţiile propozi- ţionale care specifică numere reale se împart efectiv în ordine distincte, dar pentru fiecare funcţie propoziţională de ordin mai înalt care specifică un număr real există o funcţie predicativă corespunzătoare care specifică acelaşi număr real, deoarece este satisfăcută de aceleaşi numere raţionale şi nu este satisfăcută de nici un alt număr raţional. Cu toate acestea, în principiu ne mai este încă interzis să facem generalizări cu privire la toate funcţiile propoziţionale, indiferent de ordin ; dar în contexte ca cel de mai sus putem avea convingerea că dacă vorbim despre toate funcţiile predicative nu vom lăsa la o parte nimic din ceea ce trebuie spus. Un alt exemplu al avantajelor pe care ni le oferă axioma este posibilitatea de definire a identităţii (aşa cum am văzut în capitolul anterior) făcînd referire numai la funcţii predicative. în acelaşi timp, paradoxurile de felul celor obişnuite rămîn excluse, întrucît ele nu pot fi reformulate numai în termeni de funcţii predica- tive. Aşadar, dacă încercăm să reconstruim paradoxul lui Berry, vorbind însă numai despre întregi denumibili prin numiri de ordinul unu (de exemplu prin denumiri compuse din numerale engleze în aranjamente ca „cinci doi nouă”),

constatăm că ceea ce spunem nu generează vreo contradicţie.

Dar atunci avem oare vreun motiv, în afară de convenabilitate, pentru a accepta axioma reductibilităţii ? Russell recunoaşte că ar fi greu să spunem că această axiomă constituie un adevăr de la sine evident al logicii, dar el încearcă s-o explice şi s-o facă plauzibilă, arătînd conexiunile ei cu ceea ce au spus logicienii privitor la clase, în articolul său din 1908, el sugerează că această axiomă ar putea fi denumită axioma claselor, dar în introducerea la *Principia Maihe- matica* el scrie mai prudent:

„Dacă admitem existenţa claselor, axioma de reductibilitate poate fi demonstrată.

într-adevăr, în acest caz, fiind dată o funcţie arbitrară $\overset{A}{t}>z$ de un ordin oarecare, există A o clasă alcătuită din exact acele obiecte care satisfac <pz. «<px > este deci echivalentă ci •*x* aparţine la a» . Dar «*x* aparţine la a* este un enunţ care nu conţine variabile aparent: şi, ca atare, este funcţie predicativă de *x.* Aşadar, dacă presupunem existenţa claselor axioma de reductibilitate nu mai este necesară... Cu toate acestea, ţinînd seama ati de contradicţii, care necesită o tratare mai complicată în ipoteza admiterii claselor, cî şi <le faptul că întotdeauna este indicat să facem cea mai slabă presupunere reclamat: de demonstrarea teoremelor noastre, preferăm să admitem axioma de reductibilitate îi locul existenţei claselor”[1]’.

Cînd Russell spune aici că ,,*x* aparţine la a” este o funcţie predicativi de *x,* deoarece nu conţine variabile aparente, se pare că el nu fac nici o distincţie între o funcţie şi o expresie funcţională. Dar, desigur el nu urmăreşte să sugereze că introducerea literei greceşti ca abre

---

[17] *Ibid.,* p. 58. viere pentru *z(<pz)* este suficientă pentru a ne da toate beneficiile axiomei reductibilităţii, şi ca atare trebuie să admitem că Russell consideră că a este o desemnare introdusă fără ajutorul lui *cpx* sau al oricărei alte expresii funcţionale de acelaşi gen. Totuşi, nu este clar cum — fără a presupune axioma de reductibilitate — el îşi poate închipui posibilitatea unei atare noi desemnări pentru clasa desemnată anterior

$\overset{A}{z}(cpz),$

prin dacă nu cumva el crede în mod eronat că orice clasă poate fi indicată prin enumerarea membrilor săi.

într-un pasaj ulterior, Russell vine cu o nouă argumentare :

„Axioma de reductibilitate echivalează cu presupunerea că orice

combinaţie sau disjnncţie de predicate (date în mod intensional) este echivalentă cu un predicat unic, adică este echivalentă cu presupunerea că, dacă afirmăm că *x* are toate predicatele ce
A
satisfac o funcţie /(q> !z) există un predicat pe care *x* îl va avea ori de cîte ori afirmaţia noastră este adevărată şi nu-l va avea ori de cîte ori este falsă, şi similar, dacă afirmăm A
că *x* are unul diu predicatele care satisfac o funcţie /(ţ>k). într-adevăr, prin intermediul acestei presupuneri, ordinul unei funcţii nepredicative poate fi coborît cu o unitate ; deci, după un număr finit de paşi, vom fi în măsură să ajungem de la o funcţie nepredicativă oarecare la o funcţie predicativă formal echivalentă"††††††

nu fac altceva decît să excludă paradoxuri legate de noţiuni semantice sau lingvistice ca denumirea sau definirea, noţiuni cu care matematicianul nu operează în activitatea sa profesională.

Odată admisă concepţia lui Ramsey, pare mai firesc să tratăm paradoxurile semantice prin măsuri semantice speciale, iar sugestia care a căpătat cel mai mare cîştig de cauză rezidă în distincţia între limbaj şi metalimbaj, introdusă de Tarski în lucrarea sa *Der Wahrheits- begriff in die formalisierten Sprachen™.* Potrivit acestei distincţii, nici un limbaj necontradictoriu nu poate conţine înăuntrul său mijloacele pentru a vorbi despre semnificaţia sau adevărul propriilor sale expresii, iar paradoxuri cum sînt Mincinosul şi contradicţia lui Berry survin din cauză că nu s-a ţinut seama de această limitare. Dacă, de exemplu, vorbim despre *cel mai mic întreg nedenumibil în mai puţin de douăzeci şi şapte silabe,* trebuie să se presupună că vorbim cu referire la resursele unui anumit limbaj particular sau ale unor anumite limbaje particulare. Dacă înţelegem acest lucru, va fi limpede că expresia cursivă de mai sus nu este construită cu resursele limbajului sau limbajelor la care se face referire, ci aparţine unui metalimbaj esenţialmente mai bogat; cu această clarificare, paradoxul va dispărea. Din nefericire, adesea noi nu reuşim să înţelegem această distincţie cînd vorbim despre folosirea unei limbi naturale cum este româna, deoarece ne-am obişnuit să considerăm această limbă ca omnicompetentă; de aici provin toate necazurile noastre. Dacă vrem să evităm contradicţiile, trebuie să insistăm asupra faptului că, de regulă, ceea ce noi numim română este în realitate un şir infinit de limbi, şi anume românaj, îr care putem discuta despre bețe şi pietre şi despre multe alte lucruri, dar nu despre româna!; româna $_2$, în care putem discuta despre toate lucrurile pe care le putem discuta folosind româna^ dar în plus ma: putem discuta şi despre însăşi româna!; româna$_3$, în care putem discuta despre toate lucrurile pe care le putem discuta folosind româna$_2$ dar în care mai putem discuta şi despre româna $_2$, şi aşa mai departe în cadrul acestei scheme, româna„$_+$i este un metalimbaj în rapor' cu româna,,.

Tarski recomandă distincţia sa ca fiind necesară în vederea soluţio nării paradoxului mincinosului; este însă interesant să arătăm ci această distincţie poate fi derivată din teoria simplă a tipurilor. Si presupunem mai întîi că încercăm să întrebuinţăm cuvintele „desem

[20] A se vedea şi volumul *Logic, Semantics, Metamathematics,* p. 152 — 278. neză" şi „desemnare" fără vreo referiie implicită la un anumit limbaj particular şi că construim cu ajutorul acestora formula:

„Desemnare" desemnează desemnare.

Aici avem o încălcare vădită a teoriei simple a tipurilor, întrucît se spune că o relaţie este unul d'n propriii săi termeni. Nu este însă suficient să spunem că pe viitor vom vorbi întotdeauna despre *desemnare in română.* Exact aceeaşi dificultate survine şi atunci cînd construim formula:

„Desemnare în română" desemnează în română desemnare în română

Dificultatea începetează însă să fiinţeze dacă recunoaştem stratificarea explicită în paragraful anterior şi scriem:

„Desemnare în română/' desemnează în română$_2$ desemnare în românăi

într-adevăr, în acest caz, precizăm că relaţia despre care vorbim este de un tip mai înalt în comparaţie cu termenii săi. Iar aceasta, după cum se pare, constituie singura ieşire din impas.

Dacă respingem distincţia între ordine, trebuie să respingem şi principiul cercului vicios din care derivă această distincţie. A face aceasta constituie mai curînd un cîştig decît o pierdere, deoarece principiul este dubios iar aplicarea sa suscită dificultăţi. De ce, de exemplu, ar trebui să spunem, împreună cu Russell, că o funcţie presupune valorile sale? Dacă însă ne propunem să reţinem teoria simplă a tipurilor, abandonînd totodată principiul cercului vicios de care Russell lega această teorie, trebuie să reflectăm foarte serios dacă în adevăr teoria simplă are plauzibilitatea intrinsecă pe care Russell o revendica pentru ea, adică dacă este o teorie pe care am reţine-o pentru propriile sale merite, de îndată ce i-am înţeles conţinutul. Pen- :ru a pregăti adoptarea unei decizii în această chestiune, să încercăm ncă o dată să clarificăm ce presupune această teorie şi în ce relaţie riă ea cu teoria funcţiilor propoziţionale introdusă de către Frege.

Noutatea esenţială adusă de teoria lui Russell este o lărgire a regu- ilor de semnificaţie prin care Russell exclude din domeniul formulelor rine formate anumite combinaţii de

semne care în caz contrar ar trece irept propoziţii corecte din punct de vedere gramatical; în particular,

A

înt excluse toate combinaţiile de forma *F(Fx)* sau, în notaţia noastră, *<(§xFx).* în loc de a analiza dacă aceste combinaţii exprimă propo- iţii adevărate sau propoziţii false, Russell afirmă că ele nu exprimă lici un fel de propoziţii. în analiza pe care o face funcţiilor de diferite niveluri, Frege a anticipat distincţia russelliană între tipuri; se pare însă că este un simplu accident faptul că regulile lui Frege pentru utilizarea semnelor funcţionale fac imposibilă construirea în sistemul său a paradoxului proprietăţii de a fi o proprietate ce nu se exemplifică pe sine. într-adevăr, Frege susţinea că orice *obiect* poate intra ca argument în orice funcţie propoziţională de nivelul unu, aşa încît tot ce s-ar putea spune mai rău despre alcătuirea „7 este mai înţelept ca luna" ar fi că exprimă o propoziţie falsă; iar dacă ar fi acceptat posibilitatea de a vorbi despre *funcţii* prin intermediul unor desemnări care nu conţin locuri goale, Frege ar fi fost probabil în măsură să le trateze în acelaşi mod. Dar el era convins că orice semn utilizat de noi pentru a vorbi despre o funcţie trebuie să conţină un loc gol (care era marcat cu ajutorul unei consoane greceşti mici care ea însăşi nu făcea parte din scrierea sa), şi de aceea presupunea că o funcţie ar putea figura ca argument într-o altă funcţie numai dacă expresia acesteia din urmă, să zicem a —— <p(a) ar permite umplerea locului gol din expresia primei funcţii, să spunem C>(p), producînd astfel o propoziţională completă, de pildă a —d>(a). Acest lucru reiese clar din modul în care Frege tratează funcţiile de nivel doi în *Grundgesetze.*

Dacă singurele semne pentru funcţii ar fi expresii ca „. • • este înţelept", considerente de gramatică obişnuită ar fi suficiente pentru garantarea adevărului teoriei tipurilor. într-adevăr, „ • • • este înţelept" nu este, desigur, o propoziţie a limbii noastre şi nimeni nu-şi va pune serios chestiunea dacă această combinaţie de cuvinte exprimă o propoziţie adevărată sau o propoziţie falsă. Atunci cînd în simbolismul nostru logic scriem *F(Fx),* am putea eventual să presupunem pentru o clipă că această combinaţie de simboluri poate exprima o propoziţie, dar dacă ne aducem aminte de faptul că litera *x* este un simplu semn pentru locul gol, vedem că aceasta nu este o expresie propoziţională bine formată. Pînă la acest punct putem fi de acord cu Frege şi uneori s-a

sugerat că aceasta ar fi întreaga teorie a tipurilor**********. Dar, în limba obişnuită, noi avem substantive fără nici un loc gol, de pildă „înţelepciune", care desemnează funcţii, şi, aş; cum am văzut, se pot introduce semne de acelaşi gen şi în simbolismu logicii. Problema importantă care se pune este de a şti dacă oricţ complex de forma *F(§xFx)* poate exprima o propoziţie, iar la aceast; întrebare nu putem obţine un răspuns limpede nici pe baza gramaticii academice, nici prin studierea uzului comun al cuvintelor. într-adevăr, „înţelepciunea este înţeleaptă" nu este în mod incontestabil negramaticală, şi deşi nimeni, exceptîndu-l poate pe Platon, nu ar oferi-o ca un enunţ adevărat, mulţi oameni ar putea afirma că „Nu este cazul că înţelepciunea este înţeleaptă", ca şi cum ar considera că „înţelepciunea este înţeleaptă" ar avea o anumită semnificaţie. Cum putem rezolva această chestiune, dacă în genere o putem rezolva ?

De foarte multe ori, o propoziţie care conţine desemnarea unei funcţii poate fi înlocuită fără nici un prejudiciu printr-o propoziţie de formă diferită în care nu mai figurează vreo atare desemnare, ci numai o expresie pentru funcţie. Astfel, în loc de „Socrate era înzestrat cu înţelepciune" putem spune „Socrate era înţelept", iar în loc de „Teama de Dumnezeu este începutul înţelepciunii" — „Dacă un om se teme de Dumnezeu, el a şi început să fie înţelept". Dacă s-ar putea dovedi că toate propoziţiile cu sens care conţin desemnări de funcţii trebuie să se reducă într-un mod sau altul la propoziţii care nu conţin asemenea desemnări, am putea elimina „înţelepciunea este înţeleaptă" şi toate celelalte complexe similare, ca fiind lipsite de sens, deoarece pare limpede că acestea nu se pot reduce. Nimeni însă nu a demonstrat că trebuie întotdeauna să fie posibilă eliminarea desemnărilor funcţiilor din discursul semnificativ şi, avînd în vedere cele urmărite de noi, nu este suficient să citǎm o multitudine de exemple în care acele complexe au fost eliminate cu succes; într-adevăr, cei care nu consideră plauzibilă teoria tipurilor vor obiecta că problema în cauză nu poate fi rezolvată prin metodele ştiinţelor naturii. Aşa stînd lucrurile, maximum ce putem obţine raţionînd în acest fel este să arătăm că acel gen de complexe căruia teoria

---

**********[11] S-ar putea ca acesta să fie sensul remarcii lui Wittgenstein din *Tractatus Logico philosophicus,* 3. 332.

tipurilor îi contestă price semnificaţie este în orice caz un gen cît se poate de aparte. Considerentul expus ne poate face să înclinăm spre acceptarea teoriei ca o :ale de ieşire din impasul în care ne aflăm, dar este important să ne iăm seama că avantajele oferite trebuie plătite şi că teoria are propriile sale dificultăţi.

în primul rînd, teoria aduce o complicaţie enormă în modul nostru de expunere a logicii şi — nu în cel din urmă rînd — în enunţurile noastre lespre numere. într-adevăr, sîntem obligaţi să distingem după tip nu turnai numerele complexe, numerele reale, numerele raţionale, întregii u semn şi numerele naturale, ci să distingem şi între numerele natuale aplicabile la mulţimi de diverse tipuri. Astfel, conform dezvol- ării russelliene a teoriei lui Frege, numărul patru care este numărul irtuţilor cardinale trebuie să fie o entitate de un alt tip decît numărul atru care este numărul regilor Angliei numiţi William. Virtuţile sînt ilităţi care pot reveni oamenilor şi deci o mulţime determinată de virtuţi de un caracter aplicabil numai la atare calităţi nu poate fi caracterizată, riguros vorbind, ca aflîndu-se în aceeaşi clasă în care se află o mulţime de oameni, mulţime determinată de un caracter aplicabil numai la oameni. Se poate întîmpla că, aşa cum spunea Frege, entităţile de toate genurile ce se pot concepe pot fi enumerate, dar se pare că pentru fiecare tip distinct trebuie să avem o aritmetică deosebită ; cu alte cuvinte, că numeralele din egalităţile 2 *oameni* -f- 2 *oameni = 4 oameni* şi 2 *virtuţi* + 2 *virtuţi* = 4 *virtuţi* nu pot semnifica aceleaşi numere. Russell încearcă să depăşească această dificultate spunînd că utilizează simbolurile logicii şi matematicii cu *ambiguitate sistematică.* După el, avem într-adevăr tipuri deosebite de numere naturale (şi astfel tipuri deosebite de numere raţionale etc.), dar în dezvoltarea aritmeticii pure putem fără grijă să trecem cu vederea această complicaţie, întrucît formulele noastre se vor aplica fără nici o modificare la orice tip care ar putea fi pus în cauză în matematica aplicată, sau chiar şi în acele ramuri ale matematicii pure în care numărăm înseşi numerele.

în al doilea rînd, teoria tipurilor înlătură posibilitatea obţinerii definiţiei unei infinităţi de numere naturale în vreo modalitate de felul celei sugerate de Frege. Dacă spunem că 0 este mulţimea tuturor mulţimilor echivalente în sensul tehnic al lui Cantor cu mulţimea lucrurilor neidentice cu ele însele iar 1 mulţimea tuturor mulţimilor echivalente în

acelaşi sens cu mulţimea {0}, este neapărat greşită afirmaţia că 2 ar fi mulţimea tuturor mulţimilor echivalente mulţimii ale cărei membri sînt 0 şi 1. Intr-adevăr, conform primelor două definiţii, 1 este de un tip mai înalt decît 0 şi deci nu poate exista vreo mulţime în care ambele să fie membri. Tratînd entităţile pe care le numea obiecte, Frege nu făcea nici un fel de distincţii de niveluri; dar dacă Russell are dreptate, atunci definiţia sa pentru 2 este tot atît de curioasă ca şi presupunerea că Socrate şi înţelepciunea ar putea avea o caracteristică comună, şi în felul acesta metoda sa de procurare a unei infinităţi de numere naturale trebuie abandonată. Pentru matematică însă este esenţial ca şirul numerelor naturale să nu aibă sfîrşit şi de aceea Russell se vede constrîns să introducă o axiomă *z* infinitului specială, conform căreia există un anumit tip cu o infinitate de cazuri, acela probabil fiind tipul indivizilor, care este cel ma coborît în cadrul ierarhiei. Fără această axiomă, ne spune el, nu an avea nici o garanţie împotriva posibilităţii dezastruoase ca obţinere; de numere să eşueze la un anumit număr, cel mai înalt, adică 1; numărul membrilor celei mai largi mulţimi cu putinţă.

Axioma infinitului prezintă ceva profund nesatisfăcător. Ea ni poate fi caracterizată ca un adevăr al logicii în nici una din accepţiil rezonabile ale acestei expresii, şi ca atare introducerea acestei axiom

ca o propoziţie primitivă a aritmeticii echivalează de fapt cu abandonarea proiectului lui Frege de expunere a aritmeticii ca o dezvoltare a logicii. Totodată, nu este o protecţie suficientă sugestia, pe care o făcea uneori Russell, că putem trata această axiomă ca pe un postulat sau ipoteză şi nu ca o axiomă în sensul vechi. într-adevăr, noi vrem să afirmăm că seria $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3$ ... este convergentă şi are
ca sumă pe 1 şi nu că are suma 1 dacă se întîmplă ca în lume să existe o infinitate de indivizi. Dar chiar dacă renunţăm la orice speranţă de a duce la îndeplinire în mod integral programul lui Frege şi facem afirmaţia îndrăzneaţă că axioma lui Russell este cerută ca o premisă extralogică a matematicii, se pune întrebarea cum putem justifica faptul că o acceptăm. Ce sînt indivizii despre care vorbeşte Russell şi cum putem spune dacă există o infinitate de atare indivizi? Russell spune că vrea să se refere la acele lucruri, oricare ar fi ele, ce nu pot fi denumite prin nume propriu-zis logice şi care nu pot figura în cadrul propoziţiilor decît ca subiecte. Dar el admite că este greu să indicăm în mod direct asemenea lucruri şi sugerează chiar că s-ar putea cumva să nu existe nici un asemenea lucru, deoarece orice apare a fi un individ este în fapt o clasă sau un complex de un anumit gen. în ce priveşte a doua posibilitate, care pare a fi foarte misterioasă, Russell are amabilitatea să adauge că dacă aceasta este realizată, atunci axioma infinitului trebuie să fie în mod evident adevărată pentru tipurile existente în univers. Dar el nu afirmă că ar cunoaşte cu certitudine starea de lucruri reală şi termină prin a spune că nu avem nici o metodă cunoscută pentru a descoperi dacă axioma infinitului este adevărată sau nu[a].

[a] *Introduction to Mathematical Philosophy,* p. 143.